Tema 1: Espacios vectoriales

$\sqrt{\pi}$

Curso 2009-2010

- Consideramos que E es un espacio vectorial (e.v.) en el cuerpo K de los escalares, definido:

- $(E, +, \cdot)$ con las siguientes propiedades:
  - $(+)$: asociativa, conmutativa, tiene elemento cero $\vec{0}$ y elemento inverso $(-u)$.
  - $(\cdot)$ i. $a(u+v) = au + av$ ii. $(a+b)u = au + bu$ iii. $(ab)u = a(bu)$ iv. $1u = u$

-**Subespacio vectorial**: $F \subset E$ es subespacio si:

1. $u, v \in F$ $u + v \in F$.
2. $u \in F, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in F$

- **Combinaciones lineales**: Decimos que u es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ si $\exists\, a^1, \ldots, a^n$ tal que $u = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i$. Además, toda combinación lineal de vectores de F es un vector de F

-$\langle S \rangle$ es el conjunto de las combinaciones lineales de S y, además, es el más pequeño de los subespacios vectoriales que contienen a S, de manera que si $\langle S \rangle = F$ diremos que F está generado por S y que S es un sistema de generadores.

-**Base B de un e.v.**: $B \subset E \Leftrightarrow$:

1. $\forall u \in E$ es linealmente independiente:$u = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i \Rightarrow a^i = 0; \;\; i = 1, \ldots, n$
2. $\langle B \rangle$ es un sistema de generadores

- Todo $E \neq \{\vec{0}\}$ generado por un nombre finito de vectores tiene una base finita $\Rightarrow$ Todo sistema de generadores contiene una base $\Rightarrow$ Toda base es un sistema de generadores.

-**Teorema de Steinitz**: Sean $u_1, \ldots, u_n$ una base de E y $v_1, \ldots, v_m$ vectores independientes cualesquiera, podemos sustituir m vectores de la base por $v_1, \ldots, v_m$ obteniendo una nueva base.

- Si E tiene una base finita, entonces, todas las bases tienen el mismo número de vectores. Dicho número coincide con la dimensión de E, es además el número máximo de vectores linealmente independientes y el número mínimo de generadores.

- Sea $F \subset E$, se tiene que $\dim F \leq \dim E$ y $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

- $F \cap G$ es un subespacio vectorial de E. La unión de F y G, podemos definirla como: $F \cup G \approx F + G = \{u + v \mid u \in F,\ v \in G\}$ y es el más pequeño de los subespacios que contienen F y G.

- **Fórmula de Grassman**: Sean $F \subset E$ y $G \subset E$, entonces $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

- Si $(F \cap G) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim F + G = F \oplus G$, es decir, es suma directa si la expresión de un vector como suma de uno de F y uno de G es única. Además, si $\dim E$ es finita, se tiene que: $E = F \oplus G$.

-**Coordenadas**: Sea $v = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i u_i \implies a^i$ son las coordenadas de v en la base u_i

CAMBIO DE BASE Un mismo vector v podemos expresarlo de maneras diferentes si variamos la base; por ejemplo:

1. $v = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i u_i$, donde a^i son las coordenadas de v en la primera base, u_i.
2. $v = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b^j e_j$, donde b^j son las coordenadas de v en la segunda base, e_j. Tenemos que $i = j = 1, \ldots, n$.

   Entonces, estableceremos una relación entre a^i y b^j:

   a) Los vectores que forman la segunda base, podemos expresarlos de la siguente manera:

   $$e_1 = p_1^1 u_1 + \ldots p_1^n = \sum_{i=1}^{n} p_1^i u_i$$

   $$\vdots$$

   $$e_n = p_1^n + \ldots p_n^n u_n = \sum_{i=1}^{n} p_n^i u_i$$

   Con lo cual, generalizando, tenemos que $e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_j^i u_i \quad j = 1, \ldots n$.

   b) Entonces, podemos expresar un vector v de la siguiente manera:

   $$v = \sum_{j=1}^{n} b^j e_j = \sum_{i=1}^{n} b^j \left(\sum_{i=1}^{n} p_j^i u_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(b^j p_j^i u_i \right)$$
   $$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(b^j p_j^i u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b^j p_j^i \right) u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^i b^j \right) u_i = \sum_{i=1}^{n} a^i u_i.$$

   Con lo cual:

   $$\boxed{a^i = \sum_{j=1}^{n} p_j^i b^j}$$

Donde: $a^i \equiv A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ y $\mathrm{b}^j \equiv B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$

Las a^i son las coordenadas del vector en la primera base $u_1, \ldots, u_n$ y las b^j son las coordenadas del vector en la segunda base $e_1, \ldots, e_n$. Y finalmente:

$$p_j^i \equiv P = \begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^n & \cdots & p_n^n \end{pmatrix},$$

que es la matriz del cambio de base de la primera base u_i a la segunda base e_i. Cada columna, representan las coordenades de la segunda base en la primera, es decir las coordenadas de $e_1, \ldots, e_n$ en la base u_1.

Tenemos que: $A = P \cdot B \Rightarrow B = Q \cdot A$, donde $Q = P^{-1}$, con lo cual $Q \cdot P = I$.