Elementos de Mecánica Analítica

Manel Bosch Aguilera

Noviembre 2010

Restricción: Sistemas de partículas conservativos

Coordenadas generalizadas

- Grados de libertad del sistema: s
- Coordenadas generalizadas: $S = \{q_i, \ldots, q_s\}\,;\;\; s \leq 3N$
- Ligaduras: restricciones al movimiento.
  - **Holónomas:** Expresables mediante ecuación que relaciona a las coordenadas:

    $$f(\{q_i\}) \;\rightarrow\; q_i = f^{-1}(\{q_j\}) \quad j \neq i$$

    Cada una reduce en una unidad los grados de libertad.

    $$s = 3N - H$$

  - Restricciones que expresamos mediante inecuaciones.
- Velocidades Generalizadas: La velocidad generalizada de la coordenada $q_i = q_i(t)$ es

  $$\dot{q}_i(t) = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$$

- Configuración: especificación de valores numéricos de las C.G.
- Espacio de configuraciones: Espacio de dimensión s cuyas coord. son las C.G.

Lagrangiano: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; t)$

$$\mathcal{L} = T - V$$

- Energía cinética:

$$T = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \frac{1}{2} A_{k,l}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} A_k\dot{q}_k + A_0$$

Principio de Hamilton:

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; t')\mathrm{d}t'$$

es un extermo.

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Teoremas de conservación:

MOMENTO GENERALIZADO

- Momento generalizado asociado a la coord q_k:

  $$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

- Coordenada ignorable: $q_k \in S$ es ignorable si no aparece explícitamente en $\mathcal{L}$.
- Momento conjugado de q_i:

  $$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

- Conservación del momento generalizado: si q_k es una coordenada ignorable, entonces p_k es constante.

ENERGÍA

- Energía mecánica cuando C.G. indep. de tiempo:

  $$E = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = 2T - (T - V)$$

- Teorema de conservación de la energía: Si el tiempo no aparece explícitamente en $\mathcal{L}$, se conserva la energía.

Ecuaciones de Hamilton

- Hamiltoniano: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s; t)$

  $$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

- Ecuaciones de Hamilton:

  $$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

  Cuando C.G. no dependen del tiempo $\mathcal{H} = E$.

- Espacio de fases: $\Phi = \{q_1, \ldots, q_s, p_1 \ldots, p_s\}$, dimensión $2s$, además $S \subset \Phi$.
- Al estudiar la evolución, además de las ecuaciones de Hamilton se verifica

  $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Teoremas de conservación

- Si q_k es una coord. ignorable del Hamiltoniano se conserva el momento conjugado.
- Si el Hamiltoniano es independiente del tiempo se conserva la energía.