

1. Funciones de Legendre

Gráficas de los primeros polinomios de Laguerre se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- <http://www.sali.freesevers.com/images/engg/legendre.gif>
- <http://www.efunda.com/math/legendre/images/LegendrePPlot.gif>

1.1. Ecuación diferencial

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (1)$$

1.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (2)$$

1.3. Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3)$$

1.4. Función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (4)$$

1.5. Fórmula de recursividad

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (5)$$

1.6. Ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (6)$$

2. Funciones de Legendre asociadas

2.1. Ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (7)$$

2.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (8)$$

2.3. Fórmula de Rodrigues

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n \quad (9)$$

2.4. Función generatriz

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2} t^m}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x) t^n \quad (10)$$

2.5. Fórmula de recursividad

$$(n-m)P_n^m(x) = x(2n-1)P_{n-1}^m(x) - (n+m-1)P_{n-2}^m(x) \quad (11)$$

2.6. Ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \quad (12)$$

3. Funciones de Laguerre

Gráficas de los primeros polinomios de Laguerre se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- <http://mathworld.wolfram.com/l1img409.gif>
- <http://www.aero.ufl.edu/~uhk/laguer.jpg>

3.1. Ecuación diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (13)$$

3.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[(xe^{-x}) \frac{dy}{dx} \right] + ne^{-x}y = 0 \quad (14)$$

3.3. Fórmula de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (15)$$

3.4. Función generatriz

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n \quad (16)$$

3.5. Fórmula de recursividad

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x) \quad (17)$$

3.6. Ortogonalidad

$$\int_0^{\infty} L_m(x)L_n(x)e^{-x} dx = \delta_{mn} \quad (18)$$

4. Funciones de Laguerre asociadas

4.1. Ecuación diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (k+1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (19)$$

4.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[(x^{k+1} e^{-x}) \frac{dy}{dx} \right] + n e^{-x} x^k y = 0 \quad (20)$$

4.3. Fórmula de Rodrigues

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x}) \quad (21)$$

4.4. Función generatriz

$$(-1)^k t^k \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^k(x)}{n!} t^n \quad (22)$$

4.5. Fórmula de recursividad

$$\frac{n-k+1}{n+1} L_{n+1}^k(x) + (x+m-2n-1) L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^m(x) = 0 \quad (23)$$

4.6. Ortogonalidad

$$\int_0^{\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} x^k dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{mn} \quad (24)$$

5. Funciones de Bessel

Gráficas de los primeros polinomios de Bessel se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- <http://mathworld.wolfram.com/bimg1295.gif>
- <http://www.efunda.com/math/bessel/images/BesselJPlot.gif>
- http://www.physics.csbsju.edu/QM/i/bessel.J_m.plot.a.gif

5.1. Ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (25)$$

5.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left(x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0 \quad (26)$$

5.3. Fórmula de Rodrigues

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!(n+p)!} \quad (27)$$

5.4. Función generatriz

$$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (28)$$

5.5. Fórmula de recursividad

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (29)$$

5.6. Ortogonalidad

$$\int_0^1 dx x J_n(\lambda_1 x) J_n(\lambda_2 x) = 0, \text{ donde } J_n(\lambda_i) = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (30)$$

6. Funciones de Hermite

Gráficas de los primeros polinomios de Hermite se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- <http://mathworld.wolfram.com/himg2089.gif>
- <http://www.efunda.com/math/Hermite/images/HermiteHPlot.gif>

6.1. Ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad (31)$$

6.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[\left(e^{-x^2} \right) \frac{dy}{dx} \right] + 2ne^{-x^2}y = 0 \quad (32)$$

6.3. Fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (33)$$

6.4. Función generatriz

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \quad (34)$$

6.5. Fórmula de recursividad

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (35)$$

6.6. Ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (36)$$

7. Polinomios de Chebyshev

Gráficas de los primeros polinomios de Chebyshev se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- <http://mathworld.wolfram.com/climg2363.gif>
- <http://www.efunda.com/math/Chebyshev/images/ChebyshevTPlot.gif>
- <http://www.ms.uky.edu/~larry/images/graph.gif>

7.1. Ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \quad (37)$$

7.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\sqrt{1-x^2} \right) \frac{dy}{dx} \right] + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0 \quad (38)$$

7.3. Fórmula de Rodrigues

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{1-x^2}}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad (39)$$

7.4. Función generatriz

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \quad (40)$$

7.5. Fórmula de recursividad

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (41)$$

7.6. Ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} \delta_{mn} & m = n = N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (42)$$