FORMULARI DE MECÀNICA TEÒRICA

Víctor García Carrasco

FORMALISME LAGRANGIÀ

Equació de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i$ on $L=T-U$, $Q_i=\sum_i \vec{F}_{i(NC)}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$

$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ $\quad \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$ $\quad L'=L+f(q,t)$ $\quad q_i$ coord. ciclica si $L\neq L(q_i)$, $P_i=cnt$, $\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

FORMALISME HAMILTONIÀ

$H(q_i,p_i,t)=\sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i,\dot{q}_i,t)$

Eq. Canòniques de Hamilton: $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $\quad \frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$

$$\left.\begin{array}{l} q\neq q(t) \\ U\neq U(\dot{q}) \end{array}\right\}\Rightarrow H=T+U=E$$

TRANSFORMACIONS CANÒNIQUES

Condicions de canonicitat per parcials:

$$\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\partial p}{\partial P}\quad \frac{\partial Q}{\partial p}=-\frac{\partial q}{\partial P}\quad \frac{\partial P}{\partial q}=-\frac{\partial p}{\partial Q}\quad \frac{\partial P}{\partial p}=\frac{\partial q}{\partial Q}$$

Condicions de canonicitat per claudàtors de Poisson:

$[Q,Q]=[P,P]=0$ $\quad [Q,P]=\delta_{ij}=1$ on: $[u,v]_{q,p}=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}\right)$

$$\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0\Rightarrow\frac{\partial[u,v]}{\partial t}=0\qquad \frac{du}{dt}=[u,H]+\frac{\partial u}{\partial t}$$

Propietats dels claudàtors de Poisson:

$[u,v]=-[v,u]$ $\qquad [uv,w]=[u,w]v+u[v,w]$

$[au+bv,w]=a[u,w]+b[v,w]$

Identitat de Jacobi: $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$

Hamiltonià de l'oscil·lador harmònic: $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2$ on: $k=m\omega^2$

FORCES GENERALITZADES

$p_i\dot{q}_i-H=P_i\dot{Q}_i-K+\frac{dF}{dt}$ $\qquad H(q,p)\quad K(Q,P)$

$H=K\Leftrightarrow\begin{cases} q\neq q(t)\\ p\neq p(t)\end{cases}$ $\qquad K=H+\frac{\partial F_i}{\partial t}$

$F=F_1(q,Q,t)$ $\qquad p_i=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\quad P_i=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$

$F=F_2(q,P,t)-Q_iP_i$ $\qquad p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\quad Q_i=\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$

$F=F_3(p,Q,t)+q_ip_i$ $\qquad q_i=-\frac{\partial F_3}{\partial p_i}\quad P_i=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$

$F=F_4(p,P,t)+q_ip_i-Q_iP_i$ $\qquad q_i=-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\quad Q_i=\frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

TEORIA DE HAMILTON - JACOBI

Equació de Hamilton-Jacobi: $H\left(q_1,\ldots,q_n,\frac{\partial F_2}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial F_2}{\partial q_n},t\right)+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0$

Funció principal de Hamilton: $F_2\equiv S=S(q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},t)$

$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$ $\qquad P_i=\alpha_i\quad p_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}$

$q_i=q_i(\alpha,\beta,t)$ $\quad p_i=p_i(\alpha,\beta,t)$ $\quad Q_i=\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial S}{\partial P}$

En l'oscil·lador harmònic: $q=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin\left[\omega(\beta+t)\right]$

$p=\sqrt{2m\alpha}\cos(\omega(\beta+t))$ $\qquad \beta=\frac{1}{\omega}\arctan\left(m\omega\frac{q_0}{p_0}\right)$

SÒLID RÍGID

Moments per distribucions de massa: $I_{ij}=\int_V\rho(\vec{r})\left[\delta_{ij}\sum_k x_k^2-x_ix_j\right]dV$

Moments per masses puntuals: $I_{ij}=\sum_\alpha m_\alpha\left[\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2-x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right]$

Equacions per sòlids sense forces aplicades:
(Euler en absència de forces externes)

$$I_1\dot{\omega}_1=\omega_2\omega_3(I_2-I_3)$$
$$I_2\dot{\omega}_2=\omega_3\omega_1(I_3-I_1)$$
$$I_3\dot{\omega}_3=\omega_1\omega_2(I_1-I_2)$$

Teorema de Steiner (eixos desplaçats): $I_{ij}^{CM}=I_{ij}^{NoCM}-M\left(a^2\delta_{ij}-a_ia_j\right)$

On I_{ij}^{CM} ha de ser el moment d'inèrcia respecte el CM de la figura en qüestió

Moment angular: $L_i=I_i\omega_i=\sum_j I_{ij}\omega_j$ $\qquad L=\vec{r}\wedge m\vec{v}$

Energia cinètica de rotació: $T_{rot}=\frac{1}{2}\sum_i\omega_iL_i=\frac{1}{2}\sum_{i,j}I_{ij}\omega_i\omega_j=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$

Període de precessió: $T=\frac{2\pi}{\Omega}$

ANNEX 1: Fórmules bàsiques

$T=\frac{2\pi}{\Omega}$ $\qquad F=-\vec{\nabla U}$ $\qquad$ Per petites oscil·lacions tindrem:

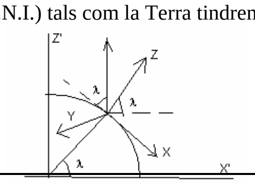
Constant efectiva: $k_{eff}=\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}$ $\qquad$ Freqüència: $\omega_0=\sqrt{\frac{k_{eff}}{M}}$

Per sistemes de referència no inercials (S.R.N.I.) tals com la Terra tindrem:
Sigui lambda la latitud:

$\ddot{x}\simeq 2\omega\sin\lambda\dot{y}$

$\ddot{y}\simeq -2\omega\sin\lambda\dot{x}-2\omega\cos\lambda\dot{z}$

$\ddot{z}\simeq 2\omega\cos\lambda\dot{y}-g$



ANNEX 2: Solucions per a coordenades cilíndriques

$x=r\cos\theta$ $\quad \dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta$

$y=r\sin\theta$ $\quad \dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$ $\qquad T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{P_r^2}{2m}+\frac{P_\theta^2}{2mr^2}$

$z=z$ $\quad \dot{z}=\dot{z}$

ANNEX 3: Solucions per a coordenades esfèriques

$x=R\sin\theta\cos\varphi$ $\quad \dot{x}=R\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-R\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$

$y=R\sin\theta\sin\varphi$ $\quad \dot{y}=R\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+R\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$

$z=R\cos\theta$ $\quad \dot{z}=-R\dot{\theta}\sin\theta$

$T=\frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)$ per R constant