Mecánica de bachiller (I)

Barbol

24 de agosto de 2004

Índice general

Parte I

Lo básico

Capítulo 1

Introducción

1.1. Primer consejo, venga

¿Qué es la física? Aunque parezca que no, esta pregunta tiene miga: se han dado muchas respuestas y en cada una de ellas podremos encontrar algún inconveniente para aceptarla. La mayoría de estas respuestas no responden a la pregunta inicial sinó a un "¿qué estudia la física?" o un "¿cómo se hace física?".

Está claro que estos apuntes no tienen que tratar de encontrar una contestación que nos valga a esa pregunta, que por algo son apuntes a nivel de bachiller, pero sin embargo hay que tener una cosa presente, **muy** presente: la física intenta explicarnos cómo funciona el mundo.

"Vale", diréis, "eso ya lo sabía". Sí, no lo niego, lo sabíais, pero luego pasa lo que pasa y el profesor nos suspende, que lo sé yo. Y es que eso que acabo de decir no lo tenemos en cuenta a la hora de hacer física (llamadlo, si queréis, resolver ejercicios). Por ejemplo, imaginad que nos preguntan cuánto tiempo tardará en caer una piedra si la lanzamos así o asá. Podemos ponernos a hacer cálculos como locos y decir: "pues tarda siete segundos". Oye, pues puede tardar siete segundos, por lo menos es un resultado con lógica, el problema aparece cuando alguien dice, todo lleno de razón: "pues tarda menos siete segundos". ¿Os dais cuenta de lo que está diciendo ese personaje? Menos siete segundos implica que la piedra cae siete segundos antes de que la lancemos... lo cual es algo muy improbable, como bien comprendéis.

Recordad pues lo que os dije... no os lancéis a hacer cálculos con las formulitas que os aprendisteis de memoria para el examen, actuad con lógica y mirad por qué las cosas son de esa manera y no de otra.

1.2. ¿Y cómo van estos apuntes?

Pues me temo que va a ir todo escrito de un modo algo inusual, y es que voy a intentar abarcar todo el nivel posible de estudios pre-universitarios y esto implica que lo voy a tener que explicar todo tres veces.

En el primero de estos niveles, que llamaremos amistosamente *nivel ni-pajolera* apenas necesitarmemos más matemáticas que las de educación primaria... es decir, sumar, restar, multiplicar, dividir y despejar ecuaciones. Por supuesto, apenas podremos decir dos cosillas sin mucha importancia, pero por algo hay que empezar, ¿no?.

En el segundo nivel (*nivel ya-sé-algo*) ya usaremos trigonometría, vectores y derivadas. Sobre la trigonometría no, pero sobre los vectores y las derivadas os explico un poquito (muy poquito) en los apéndices A y B, porque cuando yo di esto en el instituto aún no sabíamos lo que era derivar, y el maldito profesor no se molestó en explicárnoslo. Yo como soy así de enrollado sí que lo hago. Veremos que en este nivel no tendremos que memorizarnos ni la mitad de las ecuaciones, por eso usamos las derivadas.

Por último llegaremos al *nivel cuanto-sé*, en el que usaremos las integrales, de las que comento muy poquito en el apéndice C por la misma razón que hablo de las derivadas. Con esto reduciremos toda la física a una sola ecuación (¿o pensábais que las leyes de Newton sólo sirven para aprendérselas?) y el resto serán ejemplos, impresiona, ¿eh?

1.3. Deja ya de hablar, lo que me interesa es aprobar

Vale, vale, prometo que ya me pongo a escribir ecuaciones, pero antes sólo comentar por dónde empezamos.

¿Por dónde empezamos? Pues muy buena pregunta, en mis tiempos en la primera clase lo que el/la profesor/a hacía era dictarnos las leyes de Newton, así que es lo que haré a pesar de que cambiaron el plan de estudios y creo que ya no es así. Eso no tiene que preocuparos, tranquilos, que total apenas las vamos a utilizar hasta llegar al nivel *cuanto-sé*.

Entonces, ¿por dónde empezamo *de verdad*? Pues obviamente por lo que sabemos... en estos apuntes queremos estudiar cómo se mueve un objeto, ¿no?, entonces tendremos que saber dónde se encuentra ese objeto en cada instante de tiempo. Partimos pues de los conceptos de posición y tiempo.

El de tiempo es obvio, cogemos un cronómetro y lo arrancamos cuando nos dé la real gana y lo apagamos cuando nos salga de los nos vuelva a dar la gana.

El de posición tiene un pequeño inconveniente... ¿cómo le decimos a otra persona en qué sitio está? Es obvio que si tenemos el objeto a la vista podemos decir "pues está ahí, leches", el problema es cuando se lo queremos decir de un modo claro y que no pueda llevar a confusión a una persona que no lo ve "ahí". Para eso existen los **sistemas de coordenadas**: escogemos un punto al que llamamos origen y a partir de él definimos tres direcciones; una de ellas nos dará información de cuánto a la izquierda o a la derecha está el objeto del origen, otra nos dará información de cuánto hacia delante o hacia atrás está el objeto del punto y la otra nos dice cuánto hacia arriba o hacia abajo está. Así de fácil.

Si no has entendido nada de eso que acabo de decir sobre la posición intentad mirar el apéndice A, que viene a ser lo mismo.

1.4. ¿Qué le depara el futuro a estos apuntes?

Bueno, mi intención es que estos apuntes vayan mejorando (lo necesitan, creedme) añadiendo cositas nuevas y expresando de forma que se entienda mejor un montón de párrafos que no sé yo si me quedarían muy forzados.

Cuando digo cositas nuevas me refiero a añadir figuras, sobre todo para las partes en las que no hago más que hablar de senos y cosenos, poner algunas gráficas de los movimientos y explicaros como leer esas lineas tan sosas que aparecen, escribir nuevos contenidos que me dejé en el tintero... bueno, me habría dejado en el tintero si no fuese porque los hice a ordenador, etc.

Tal vez una reestructuración o un cambio de estilo en la forma de decir las cosas le vaya bien, no sé, ya veré.

Bueno, y eso es todo, a estudiar, que dijo el profeta. Recordad que hay una segunda parte de estos apuntes (o si no la hay ya, la habrá en breve) disponible en http://fisica.urbenalia.com/, con lo que si echáis algo de menos mirad antes allí.

Capítulo 2

Leyes de Newton

Supondré que disteis las leyes de Newton en clase o, en caso de que aún no llegáseis a ellas, las tenéis en cualquier libro de texto que merezca tal nombre. Cuando uno empieza con la física estas leyes sirven más bien para poco, básicamente resolver ejercicios en el que te dan la masa de un cuerpo y la fuerza que actúa sobre él y, a partir de ahí, calculas la aceleración.

Pero los que están leyendo las versiones preliminares de los apuntes dicen que el estilo está bien, así, sin usar tecnicismos y dejando las expresiones rigurosas para los libros que se venden en las librerías, así que expliquemos esas dichosas leyes.

2.1. Primera ley de Newton

A esta ley se le llama a veces **ley de la inercia**, y da cuenta de un hecho por todos conocido: *los objetos tienden a seguir a la misma velocidad y en la misma dirección*, eso del cambio no va con ellos.

Claro, a alguno de vosotros os parecerá extraño y diréis, con toda la razón, "pues si yo lanzo algo lo que veo siempre es que tiende a pararse". Tenéis toda la razón, por ese motivo voy a modificar un poco la explicación de la primera ley de Newton y os diré, por ejemplo, que *los objetos tienden a seguir a la misma velocidad y en la misma dirección cuando no haya una fuerza actuando sobre ellos.*

"Ah, ¿y qué es una fuerza?". Pues, emulando a la pescadilla que se muerde la cola, diremos que una fuerza es *todo aquello que tiende a cambiar la velocidad o la dirección en la que se mueve un objeto.*

Aún así esto no es muy fácil de ver, démosle más vueltas: he dicho que los objetos tienden a moverse a la misma velocidad y hacia el mismo sitio a no ser que algo los haga cambiar, ¿podemos ver un ejemplo? Pues claro que sí:

EJEMPLO

Imaginemos que estamos en un coche, parados en un semáforo, el semáforo se pone en verde y, por tanto, el coche arranca, inmediatamente nos sentimos atraídos hacia el respaldo del asiento, ¿verdad? Esto es así porque en aquel momento estábamos a velocidad nula (es decir, quietos) y queríamos seguir quietos, de hecho, si en vez de estar en un asiento estuviésemos de pie encima del capó seguramente nos caeríamos hacia atrás del coche... ¡para caer justo en el sitio en el que estábamos!

Lo mismo ocurre si el coche da un frenazo, si vamos a una velocidad y tenemos que frenar porque un ciervo tuvo la idea feliz de ponerse a cruzar la carretera notamos que nuestros cuerpos se van hacia adelante y menos mal que tenemos el cinturón de seguridad puesto, que nos podíamos dar un tremendo golpe.

Para ver que también tendemos a seguir en la misma dirección seguimos en nuestro coche (con el cinto puesto, recuerda). Ya hemos dejado atrás al maldito ciervo y hay una curva hacia la izquierda (dejando, por tanto, el camino "recto" hacia la derecha, si existiese), como no nos gusta ir campo a través tomamos la curva y, en seguida, todos notamos que nos vamos hacia la derecha, ¿por qué? Evidentemente, porque nuestro cuerpo quiere seguir recto.

Vemos, por tanto, que en estos tres ejemplos nuestro cuerpo (o cualquier cosa que tengamos en el coche) tiende a conservar su velocidad y la dirección de su movimiento, pero siempre hay algo que se lo impide (bien el respaldo en el primer ejemplo, el cinturón en el segundo y de nuevo el cinturón (o agarrarnos, o la puerta...) en el tercer caso). Ese 'algo' es lo que va a ejercer una fuerza que nos obligue a corregir nuestra trayectoria y/o velocidad. ¿Pero cómo podemos calcular la fuerza que actúa sobre nosotros? Pasemos a la segunda ley.

2.2. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton es una fórmula que dice $F = ma$, ya está.

Vale, os cuento algo más, F es la fuerza que actúa sobre el objeto, m es la masa del objeto sobre el que actúa la fuerza y a es la aceleración que adquiere el objeto por culpa de la fuerza.

Entonces, si, como dijimos antes, una fuerza lo que hace es variar la velocidad y/o dirección de un movimiento, y además es igual a la masa por la aceleración... ¿qué es lo que cambia en el objeto para que exista esa variación?

Una pista, la masa de un objeto suele ser constante.

¡Exacto! La variación en la velocidad y/o dirección de los objetos se traduce en una aceleración.

2.3. Tercera ley de Newton

Le suelen llamar **ley de acción-reacción** y la suelen denotar como $F_{1\to 2} = -F_{2\to 1}$, lo cual es equivalente a decir que si un objeto A ejerce una fuerza contra un objeto B, entonces el objeto B ejerce exactamente la misma fuerza contra el objeto A, pero en sentido contrario.

EJEMPLO

En el ejemplo del coche que acelera y nos quedamos pegados al respaldo; nosotros estamos ejerciendo una fuerza hacia atrás contra el respaldo, pero en ese mismo momento el respaldo está ejerciendo una fuerza hacia adelante contra nosotros (y por eso nos ponemos a la misma velocidad que el coche).

"Pero si ejercen la misma fuerza por qué nos movemos nosotros hacia adelante y no se mueve el asiento para atrás?". Es la GRAN pregunta, es una pregunta tan buena como fácil de resolver. Nosotros pesamos mucho menos que el asiento, y como la fuerza es igual a la masa por la aceleración, somos nosotros los que nos aceleramos. "Oye, si un asiento... no sé, nunca tuve uno en los brazos, pero debe pesar muy poco", pues es cierto, pero está atornillado al coche, con lo que el objeto que hace fuerza contra nosotros no es sólo el asiento... ¡es todo el coche!

Este tipo de detalles no suelen ser explicados mucho pero hay que tenerlos siempre presentes. Por ejemplo, nosotros estamos ejerciendo siempre una fuerza contra la Tierra, debido a la fuerza de la gravedad. Esta fuerza que ejercemos hacia abajo hace que no salgamos flotando, pero a la vez la Tierra ejerce una fuerza hacia arriba igual, gracias a esta segunda fuerza pues no estamos en el centro del planeta formando parte del núcleo (nos mantiene en la superficie).

Parte II

Cinemática

Capítulo 3

Nivel ni-pajolera

Aquí nos quedaremos sólo con los movimientos en una dimensión. Eso del movimiento en una dimensión no es otra cosa que un objeto (a partir de ahora diremos *una partícula*, que queda más riguroso) que se mueve en una línea recta, y ya generalizaremos (vaya palabra) más adelante para el maravilloso movimiento tridimensional (es decir: largo, alto y ancho).

Veamos primero un par de definiciones que vamos a necesitar. Ya os he comentado lo que era la posición de un objeto y cómo se determinaba, más o menos. En cada instante (llamaremos t a un instante de tiempo determinado, pero aleatorio, es decir, que no nos importa si son 10 segundos o 5 años) el objeto va a estar a una distancia que escribiremos como x.

Luego está la velocidad. Todos tenemos una idea más o menos intuitiva de qué es la velocidad y sabemos que cuánta más tenga una partícula más espacio recorrerá en el mismo tiempo, o menos tiempo tardará en recorrer la misma distancia, como prefiráis. Para una definición más física de la velocidad avanza hasta el nivel *ya-sé-algo*. A la velocidad la llamamos v. Si es mayor que cero entonces diremos que la partícula se mueve hacia adelante, si es menor que cero la partícula se mueve hacia atrás y si es cero la partícula está, obviamente, quieta.

Básicamente, la velocidad es la responsable de que las partículas se estén moviendo, ya que si fuese siempre cero estarían todas quietas... lógico, ¿no creéis?

Pero claro, la velocidad también puede cambiar... cuando vamos en un coche podemos estar yendo a $80km/h$, meternos en la autopista y ponernos a $120km/h$. ¿Qué es lo que hacemos para obtener ese cambio de velocidad? La respuesta es, como ya sabéis, acelerar. Por tanto la aceleración nos va a dar un cambio en la velocidad, y como esto nos va a interesar pues le damos un nombre y la llamamos a, en el caso anterior la velocidad aumenta y por tanto diremos que la aceleración es positiva (mayor que cero). Por supuesto también se puede dar el caso contrario y tengamos que pasar de más velocidad a menos, esto sigue siendo una aceleración, pero en este caso diremos que es negativa (menor que cero). Si la aceleración es nula (igual a cero) entonces la velocidad de la partícula es constante.

Pero bueno, prometí que me callaría y me pondría a dar ecuaciones como un poseso, lo siento, allá voy.

3.1. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Bien, mi primer consejo era actuar con lógica, así que eso es lo que haremos. Veamos qué nos dice el título de la sección: **movimiento**: implica que la partícula se mueve, lo cual es bueno, porque si no fuese el caso vaya tontería de estudio estaríamos haciendo una partícula quieta; **rectilíneo**: pues vale, digo antes que voy a tratar el caso de la partícula que se mueve en una línea recta y ahora pongo esto, seré redundante...; **uniforme**: esto ya es nuevo, significa que el movimiento es a velocidad uniforme, es decir, la velocidad es constante, veamos pues.

Para decir en qué lugar está la partícula en cada instante nos basta con encontrar la expresión que nos dé la distancia del origen a la partícula; ésta se mueve con una velocidad constante, es decir, cuando pasa un tiempo (por ejemplo $2s$) se ha alejado una cierta distancia y otros $2s$ después se ha alejado otra vez la misma distancia; esperemos cuanto esperemos, en $2s$ siempre se alejará la misma distancia, matemáticamente decimos que la distancia que se aleja es una cantidad constante multiplicada por el tiempo, lo que nos falta es saber cuál es esa cantidad. Para saberlo veamos un ejemplo: si vamos en bicicleta a $20km/h$, ¿cuánto recorreremos en una hora? Obviamente la respuesta es $20km$. ¿Y en dos horas? Vemos que la respuesta es $40km$. Por tanto la constante a multiplicar por el tiempo no es más que la velocidad de la partícula. Por tanto llegamos a:

$$x = vt.$$

Pero la expresión que acabamos de justificar tiene un grave problema: da igual que empecemos a contar el tiempo a $3m$ del origen o a $7000km$, nos dice que la distancia al origen no depende de eso, lo cual es mentira. Para solucionarlo sólo hemos de tener en cuenta, precisamente, cuál es la distancia inicial (llamémosla x_0, donde x simboliza que es una distancia y el subíndice 0 indica que es inicial) entre el origen y la partícula, de este modo la distancia en cada instante será la distancia inicial más lo que se haya alejado (o acercado si la velocidad es negativa) debido a la velocidad, por tanto la expresión correcta es:

$$x = x_0 + vt. \tag{3.1}$$

3.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

En este tipo de movimiento rectilíneo vemos que tenemos unos apellidos que nos dicen: **uniformemente acelerado**, esto no significa, por supuesto, que la velocidad sea constante como en el caso anterior, significa, en este caso, que la aceleración es constante.

Podemos hacer un razonamiento idéntico al anterior para saber cuál es la velocidad (ojo, la velocidad, no la posición) de la partícula en cada instante y llegaremos a la mismita expresión

$$v = v_0 + at. \tag{3.2}$$

Es decir, la velocidad depende de la velocidad que tenía al principio además de la variación que le mete la aceleración.

Uno se ve tentado de coger ahora y decir "pues muy fácil, ahora meto esta expresión de la velocidad en la expresión del MRU y ya tengo la ecuación que me dice a qué distancia está la partícula del origen de coordenadas en cada instante, soy un genio". Veamos qué resultado da esto y veamos por qué es incorrecto hacerlo:

$$x = x_0 + vt \Rightarrow x = x_0 + (v_0 + at)t \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + at^2.$$

Si alguien quiere pensarse antes de que yo lo diga por qué esta expresión no vale que apure, que lo voy a decir en la línea siguiente.

Pues el problema está en que en el MRU teníamos que la velocidad era constante, mientras que en el MRUA la velocidad varía (ya que es la aceleración la constante), vaya hombre, que chasco. Tal vez alguno ya os disteis cuenta de que si en el MRUA hacemos que la aceleración sea cero, entonces la velocidad inicial v_0 es siempre la misma (llamémosla v) y por tanto tendríamos la expresión correcta para el MRU, pues sí, así mismo es, como podréis observar en la física siempre estaremos haciendo generalizaciones de este estilo.

Entonces, ¿cómo solucionamos el problema ese? Es una pena, pero al nivel *ni-pajolera* no lo podemos hacer más que con fe ciega en que lo que os diga no será mentira, cuando sepamos derivar podemos encontrar una justificación (que no una demostración) y cuando ya sepamos integrar veremos que es así necesariamente.

Pues bien, para obtener la expresión sólo os diré que tenemos que multiplicar por 1/2 el término que va con la aceleración por el tiempo al cuadrado, es decir, la ecuación correcta es:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{3.3}$$

3.2.1. Caída libre

Un caso especial de MRUA es cuando dejamos caer un cuerpo desde cierta altura. Si ésta no es mucha (en comparación con el radio de la Tierra, que es aproximadamente de $6380km$) podemos considerar que la partícula se ve acelerada hacia abajo con una aceleración $a = -9{,}8m/s^2$. En este caso el signo menos indica que la atracción es hacia abajo, con lo que, si ponemos el origen en el nivel del suelo (que es lo que, a simple vista, parece más lógico) la altura inicial desde la que se lanza (es decir, $x_0 = h_0$) es positiva. Además, en este caso, como se deja caer la velocidad inicial será $v_0 = 0$. Por tanto, introduciendo estas consideraciones en la ecuación general tenemos que la altura h sobre el nivel del suelo será

$$h = h_0 - 4{,}9t^2.$$

Por supuesto, en el momento en el que h se haga negativa (es decir, la altura estará por debajo del nivel del suelo) el estudio dejará de tener sentido, porque en ese momento aparecen nuevos elementos que no se tuvieron en cuenta, estos nuevos elementos son, por ejemplo, que los objetos no suelen atravesar el suelo como si no hubiese nada.

3.2.2. Lanzamiento vertical

En el caso de que la velocidad inicial no sea nula (es decir, se le da un pequeño impulso a la partícula, como cuando lanzas una piedra hacia arriba (si haces el experimento recuerda correr después para que no te caiga encima) entonces la expresión tomará la forma

$$h = h_0 + v_0 t - 4{,}9t^2,$$

donde debes recordar que si la lanzas hacia arriba la velocidad inicial tendrá signo positivo y si la lanzas hacia abajo tendrá signo negativo.

Por supuesto, la convención de signos que yo usé (es decir, positivo hacia arriba y negativo hacia abajo) no es universal y puedes usar la contraria (positivo hacia abajo, que es hacia donde atrae la gravedad y negativo hacia arriba), en ese caso sólo tienes que cambiar todos los signos que yo dije en la sección, pero recuerda que nunca, jamás, debes mezclar ambos criterios en el mismo problema, no porque no se pueda hacer, pero sí porque te puedes armar un lío y acabar resolviendo el problema diciendo que si lanzas una piedra hacia abajo la mandas al espacio, a mi me pasó una vez (pero lo volví a hacer porque sabía que iba mal, que conste).

3.3. Composición de movimientos

Llegados a este punto nos encontramos ante un punto bastante importante de nuestro estudio, la composición de movimientos. ¿A qué nos referimos con eso de la composición de movimientos? Pues ni más ni menos que a movimientos (que redundante esta palabra, ¿eh?) que pueden ser MRU en una dirección del espacio pero, a la vez, ser MRUA en otra (por ejemplo).

¿Que cómo es eso posible? Bueno, para eso se hicieron estos apuntes, para explicarlo un poquito, ¿no? Ya se comentaron en la sección 1.3 la existencia de sistemas de coordenadas, y también allí os dije que un tratamiento más justificado desde el punto de vista matemático del asunto se da en el apéndice A.

Pues bien, dado el caso, podemos llegar a tener una partícula que en una dirección del sistema de coordenadas tenga un tipo de movimiento de los estudiados o de los que aún no hemos visto y que en otra dirección distinta tenga otra; cuando esto ocurre decimos que nos encontramos ante un caso de una composición de movimientos y el sistema para estudiarlo es muy simple: podemos tratar los dos tipos de movimiento por separado siempre y cuando tengamos en cuenta algunas ligaduras existentes entre las posiciones y tiempos, ya que sólo hay una partícula y, como es lógico, la partícula no puede estar en dos sitios diferentes a la vez, ya sabemos, aplicar la lógica.

Para visualizar todo esto de un modo más visible tenemos en la sección 4.3 un estudio simple del tiro parabólico, es decir, el tipo de movimiento que sigue una piedra cuando la lanzamos para ver quién llega más lejos.

Capítulo 4

Nivel ya-sé-algo

4.1. Velocidad y aceleración

Bien, como dije en la introducción del nivel *ni-pajolera* veremos ahora una definición de velocidad y aceleración que nos va a simplificar mucho las cosas.

La velocidad es la variación de la posición de un cuerpo respecto al tiempo. "Ah, mira tú..." diréis, y con razón, no es algo que simplifique mucho el asunto, sin embargo así es, pues (como demuestro de un modo matemático en el apéndice A) esto no significa más que que la velocidad es la derivada con respecto al tiempo del vector posición $\vec{r}$, es decir:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}. \tag{4.1}$$

Esto nos va a permitir conocer la velocidad de una partícula conociendo sólo su vector posición, lo cual ya nos elimina la necesidad de aprendernos la fórmula para la posición y la fórmula para la velocidad.

Con la aceleración pasa algo similar, definimos la aceleración como la variación de la velocidad respecto al tiempo, con lo cual, una vez conocida la velocidad podemos conocer la aceleración... ¡con la posición de la partícula ya tenemos toda la información cinemática de la misma! Por cosas como esta escogí física. Matemáticamente tenemos

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}. \tag{4.2}$$

Por tanto una vez conocida la expresión de la posición de una partícula ya podemos calcular su velocidad y su aceleración sin más que derivar respecto al tiempo, estudiemos algún movimiento con un interés especial.

4.2. MRUA

Dije antes que iba a justificar aquí aquel 1/2 que aparecía en la parte de la aceleración en la ecuación 3.3, calculemos la velocidad:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + at,$$

recuperando así la expresión (que sí justificamos correctamente) 3.2. Si ahora calculamos la aceleración derivando la velocidad respecto al tiempo tenemos:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a,$$

donde obtenemos el resultado que debíamos obtener, la aceleración es constante e igual a la aceleración, vaya galimatías, obviamente la aceleración es igual a la aceleración, ¿no?, lo que quiero decir es que si no hubiésemos puesto el $1/2$ llegaríamos al resultado $a = 2a$, el cual, siguiendo nuestro primer consejo de aplicar la lógica cuando obtengamos un resultado, es incorrecto.

4.3. Tiro parabólico

Bien, ahora a estudiar el tiro parabólico, este tema suele ser uno de los preferidos en los exámenes de bachiller, o por lo menos lo era en mi instituto. En realidad no vamos a ver nada nuevo, y se puede considerar que esta sección no es más que un ejemplo de la sección 3.3

EJEMPLO

Yo, que soy medio ludópata, me apuesto dos gallifantes con un amigo a ver quién es capaz de tirar más lejos una piedra antes de que toque el suelo (es decir, que no vale si rebota y sigue andando). Mi amigo, que no es tonto[1], acepta.

Pues allá voy yo, todo contento, tirando mi piedra al aire, ésta vuela y vuela hasta que llega a un tope de altura, en ese punto ya no sube más (de hecho empieza a bajar) pero sin embargo sigue hacia adelante sin impedimento alguno (bueno, puede que el viento nos moleste, pero supongamos que competimos en un pabellón olímpico de lanzamiento de piedras). Lo dicho, la piedra sigue avanzando pero empieza a bajar hasta que, allá adelante, toca el suelo.

Ea, no me diréis que no es una experiencia cotidiana esa. Pues bien, veamos ahora cuáles son los elementos de los que podemos disponer para estudiar el movimiento de la piedra, es decir, aquellas magnitudes que, en teoría, podemos conocer a priori para llegar a saber cuan lejos llega la piedra y cuanto tarda (también nos podían dar los resultados y nosotros tener que saber cuáles son las condiciones iniciales... por eso la física es tan bonita, porque podemos predecir el futuro o el pasado; no como con los astrólogos, que sólo predicen el pasado).

Pues bien, veamos qué cosas podemos conocer de nuestro lanzamiento de piedra. Para empezar, como es obvio, importará la altura inicial sobre el nivel del suelo, porque no es lo mismo tirar la piedra desde un metro de altura que desde lo alto de un rascacielos. Si algún día subís a un rascacielos no probéis, porque podéis matar a alguien, pero sí desde lo alto de una escalera o así. Otra cosa importante es la velocidad que le déis al piedro en cuestión, porque si lo tiráis muy despacito se os cae en los pies, pero si lo lanzáis fuerte lo mandáis al quinto pino. Ya casi lo tenemos todo, tranquilos, el último elemento que necesitamos es el ángulo que forma la dirección de la piedra cuando la lanzamos con la horizontal del lugar, porque estaréis de acuerdo conmigo en que no es lo mismo lanzar la piedra justo hacia adelante, hacia adelante y un poquito hacia arriba o totalmente hacia arriba.

Pues bien, ya está todo, alguno de vosotros podría decir "oye, y qué pasa con la masa de la piedra? Porque su peso influirá, ¿no?". A esos yo les digo que recuerden que en esta sección no vamos a ver nada nuevo y que, que yo recuerde, no hemos utilizado la masa de las partículas para nada por el momento (apenas la hemos mencionado en el apartado sobre las leyes de Newton). Para ver la importancia de la masa ya llegaremos a la parte de dinámica en la sección 5.

Pues bien, vamos a ello. Como ya he dicho aquí vamos a usar la composición de movimientos para que esto sea más simple. ¿Y cómo lo descomponemos? Pues no se nos ocurre nada más fácil que descomponerlo en un movimiento en horizontal (hacia adelante y hacia atrás) y un movimiento vertical (hacia arriba y hacia abajo); con esto nos llegará puesto que, como despreciamos el viento, nada nos va a hacer necesitar una tercera dirección perpendicular a ambas (hacia la derecha y hacia la izquierda). Para ello supondremos que el origen del sistema de coordenadas está justo al nivel del suelo y situado

[1] Y es que mi amigo me conoce y sabe que paso más tiempo haciendo apuntes de física que musculizando mi brazo.

debajo del lugar desde el que tiramos la piedra, es decir, que si la piedra se tira desde una altura h, las coordenadas serán $(0, h)$, el 0 para indicar que no está ni hacia adelante ni hacia atrás del origen y la h para indicar que está más arriba que el suelo. Esas son las posiciones iniciales.

Ahora veamos qué tipos de movimientos son los implicados. Cuando tenemos en cuenta el movimiento vertical enseguida caemos en la cuenta de que ahí hay una aceleración constante de esas que tanto nos gustan. Efectivamente, la gravedad. En el movimiento vertical tenemos un MRUA (si lo preferís, una caída libre como vimos en la sección 3.2.2. En el movimiento horizontal no parece haber ninguna aceleración que nos acelere o frene la piedra (recordad que hemos dejado el viento y cualquier otra cosa que nos pueda provocar una aceleración fuera), por lo que no es ni más ni menos que un MRU.

Visto esto podemos plantear directamente las dos ecuaciones. Llamemos x a la coordenada horizontal en cada instante de tiempo y llamemos y a la coordenada vertical (esto es lo más habitual), entonces:

$$x = x_0 + v_x t,$$
$$y = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}at^2.$$

En donde tenemos que especificar las posiciones iniciales (que ya hemos dicho cuáles eran), las velocidades iniciales (que ahora veremos cuáles son) y la aceleración, que como es la de la gravedad, vale $a = g = -9{,}81 m/s^2$ (¡fijaos en el criterio de signos!). Para conocer las velocidades iniciales tenemos cuánto vale la velocidad inicial (llamémosle v, sin subíndice) de la piedra (pero en la dirección de lanzamiento, no en las componentes horizontal y vertical) y cuánto vale el ángulo (llamémosle α) del lanzamiento. Pues bien, para calcular las velocidades iniciales no hay más que hacer un sencillo dibujo (que no se incluye aquí, pero lo hará vuestro profesor en clase o lo tenéis en vuestro libro) y recordar la trigonometría de la clase de matemáticas, viendo que $v_x = v\cos\alpha$ y $v_y = v \operatorname{sen}\alpha$; en realidad, siempre que tengamos un ángulo por ahí vamos a trabajar con él usando senos y cosenos, el truco está en saber donde va cada uno. Justifiquemos ahora por qué v_x va con el coseno y v_y con el seno: recordamos que $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{sen} 0° = 0$ y $\operatorname{sen} 90° = 1$; si la velocidad está totalmente en la dirección del eje x pues la componente v_y tendrá que ser cero, por lo tanto tendrá que ir multiplicada por la función trigonométrica que a los cero grados sea cero, esa es el seno. Por supuesto, podéis pensar que la componente v_x tendrá que ir multiplicada por uno. El argumento es válido cuando la velocidad inicial esté totalmente en la dirección y. Pues bien, ahora ya tenemos todo.

Las ecuaciones del movimiento que nos dan la posición de la piedra en todo momento son:

$$x = v\cos\alpha t,$$
$$y = h + v\operatorname{sen}\alpha t + \frac{1}{2}gt^2.$$

La velocidad a lo largo del eje x permanece siempre constante, sin embargo a lo largo del eje y varía debido a la aceleración de la gravedad de modo que:

$$v_y = v\operatorname{sen}\alpha + gt.$$

Por supuesto, podemos calcular muchas cosas sólo con estas tres ecuaciones. Por ejemplo, veamos cuánto tiempo $t_\uparrow$ tarda en llegar a la parte más alta la piedra desde que la lanzamos: en ese punto, como vimos en el ejemplo del principio de la sección, la piedra deja de subir para empezar a bajar, es decir, la velocidad en el eje y es nula, por tanto:

$$0 = v\operatorname{sen}\alpha + gt_\uparrow,$$
$$t_\uparrow = -\frac{v\operatorname{sen}\alpha}{g},$$

donde vemos que ese tiempo está bien definido puesto que, al ser $g < 0$, nos da un tiempo positivo (si nos llega a dar negativo veríamos que la piedra llega al punto más alto en la trayectoria antes de que la tiremos, lo cual sería muy curioso.

¿Y qué lejos está de nosotros ese punto en el que la piedra está lo más alta que nunca llegará a estar en ese tiro? Pues muy fácil, cogemos la ecuación que nos da la distancia a nosotros en el eje x (¿cuál sinó?) y sustituímos en ella el tiempo que le llevó llegar arriba de todo, porque si ponemos otro tiempo cualquiera simplemente ocurre que la piedra no estará arriba de todo, o aún estará subiendo o ya estará bajando. Haciéndolo vemos que:

$$x = v\cos\alpha t_{\uparrow} = -\frac{v\cos\alpha v\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g} = -v^2\frac{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{g},$$

como vemos, cuanta más fuerza le demos a la piedra (mayor velocidad inicial) más lejos se alcanzará este punto, algo que parece lógico. También encontramos una dependencia con el ángulo que le demos inicialmente a la trayectoria para que este punto sea más cercano a nosotros o más lejano. Si minimizamos esa función respecto al ángulo (es un ejercicio de matemáticas, ya sabéis, primera derivada respecto a α igualada a cero y segunda derivada negativa) encontramos que el punto es más lejano cuando la inclinación inicial es de 45°, también parece lógico, si es menos llegará antes al suelo porque el vuelo es más rasante y si es más la piedra estará más preocupada en subir que en avanzar.

También podemos preguntarnos cuánto tiempo tardará la piedra en llegar al suelo, llamemos $t_{\downarrow}$ a ese tiempo y calculémoslo: para hacerlo pensemos cómo podemos averiguarlo... la piedra tiene que llegar al suelo, dijimos... ¿y a qué altura está el suelo? ¡A cero metros! Sustituyamos en la ecuación que nos da la altura a ver qué sacamos en limpio:

$$0 = h + v\,\mathrm{sen}\,\alpha t_{\downarrow} + \frac{1}{2}gt_{\downarrow}^2,$$

andá, pero qué tenemos aquí, ¿no es, acaso, nuestra amiga la ecuación de segundo grado? De memoria me sé que la solución es menos be más menos raíz cuadrada de be cuadrado menos cuatro a ce partido de dos a, así que los tiempos solución a esa ecuación deben ser algo así como:

$$t_{\downarrow 1} = \frac{-v\,\mathrm{sen}\,\alpha + \sqrt{v^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - 2hg}}{g},$$
$$t_{\downarrow 2} = \frac{-v\,\mathrm{sen}\,\alpha - \sqrt{v^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - 2hg}}{g}.$$

Como $g < 0$ vemos que el resultado de la raíz cuadrada es siempre positivo (es una suma de dos números positivos) y que además es mayor que $v\,\mathrm{sen}\,\alpha$ (si no lo ves párate a pensarlo), por lo que, si aplicamos la lógica, vemos que la solución $t_{\downarrow 1}$ debe ser eliminada (ya que está dividido por un número negativo y nos daría un tiempo negativo), mientras que la otra solución (a partir de ahora simplemente $t_{\downarrow}$) es siempre mayor que cero y, además, es la solución correcta.

Otra pregunta que nos pueden hacer es qué lejos llega la piedra, pues muy simple, ahora que tenemos el tiempo que tarda en llegar al suelo (esto es, el tiempo que está en el aire) no tenemos más que coger la ecuación del alcance (la del eje x) y sustituír, obteniendo:

$$x = v\cos\alpha t_{\downarrow},$$
$$x = v\cos\alpha\frac{-v\,\mathrm{sen}\,\alpha - \sqrt{v^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - 2hg}}{g}.$$

Como resultado a analizar esa expresión parece una patata, pero qué se le va a hacer, sin embargo fijaos qué pasa si tiramos la piedra desde el suelo (es decir, hacemos $h = 0$), el tiempo que la piedra está en el aire se nos convierte en $t_{\downarrow} = -\frac{2v\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g} = 2t_{\uparrow}$, es decir, si lanzamos la partícula desde el suelo el tiempo que tarda en caer es el doble que el que tarda en llegar al punto más alto. Paraos a pensar y ya veréis como llegáis a la conclusión de que esto es lógico.

Ea, se podría decir mucho más acerca del tiro parabólico, pero como ni yo cobro por hacer esto ni tampoco es cuestión de que abandonéis vuestros apuntes y libros de texto, lo que queda podéis consultarlo por vuestra cuenta.

4.4. Movimiento armónico simple (MAS)

Este movimiento es de gran importancia en física por razones que no nos ponemos a detallar aquí, si a alguien le interesa el tema siempre podrá buscar información por internet, que para eso está, o meterse en la carrera y descubrirlo. Este movimiento se caracteriza porque la posición de la partícula respecto al origen cumple la ecuación $x = A\cos(\omega t + \phi)$ donde A es una constante que se llama elongación (porque cuando el coseno vale uno, que es el máximo valor que puede dar, la distancia entre el origen y la partícula no es otra que A), ω es una constante del movimiento denominada **frecuencia angular** y ϕ es otra constante denominada fase y que obviaremos (es decir, haremos $\phi = 0$).

En algunos libros en vez de con el coseno la expresión viene con el seno, esto nos va a dar lo mismo, pues un seno y un coseno vienen a ser básicamente lo mismo pero con un desfase de noventa grados, es decir, $\phi = 90°$.

Calculemos la velocidad de la partícula en cada instante y hagamos un pequeño análisis de lo que nos dice:

$$v = -A\,\mathrm{sen}(\omega t)\omega = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t). \tag{4.3}$$

¿Y podemos sacar algo de aquí? Pues si somos un poco avispados en matemáticas sí, el seno y el coseno tienen algunas características que los hacen muy jugosos, en este caso la que nos interesa es ver que cuándo uno de ellos se hace ± 1 el otro se hace 0. ¿Y eso importa mucho? Pues como la posición va con el coseno y la velocidad con el seno sí, podemos hacer algunas observaciones. Por ejemplo, cuando la distancia entre el origen y la partícula es máxima (el coseno vale ± 1 entonces la velocidad es mínima y viceversa, cuando la distancia origen-partícula es cero (el coseno es 0) entonces la velocidad es máxima.

"Andá, ¿y cómo es esto que no lo veo?". Para eso pongo un ejemplo:

EJEMPLO

Imagina una puerta de esas del Saloon del oeste, que entra el Sheriff empujándola y cuando la suelta la puerta vuelve hacia atrás, pasa por su posición de equilibrio (el centro, donde está cerrada) pero sigue para atrás, llega un momento en el que se para y, justamente, coincide con el punto más lejano al origen (donde la puerta está cerrada), de nuevo vuelve a cerrarse y cuando pasa por la posición donde estaría cerrada es justamente donde lleva más velocidad, porque luego se irá parando hasta llegar de nuevo a una posición de máxima distancia.

Lo malo del ejemplo es que en el caso de la puerta se va parando poco a poco, mientras que eso no lo vemos en nuestras ecuaciones, lamentablemente eso se nos escapa del nivel de bachiller.

Podemos seguir con el ejemplo e intentar averiguar algo sobre cómo será la aceleración, veamos: la puerta, cuando la velocidad es máxima experimenta un cambio en la dirección de la aceleración, primero la puerta se ve atraída hacia el exterior del Saloon y luego hacia el interior (y por eso empieza a decrecer la velocidad), por tanto, cuando la velocidad sea máxima (y la distancia origen-partícula nula) la aceleración tendrá que ser nula. Veamos si esto es así:

$$a = -\omega A\cos(\omega t)\omega = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\omega^2 x. \tag{4.4}$$

Vemos que se cumple nuestra predicción (menos mal, si no llega a ser el caso quedaría fatal delante de vosotros) pues la aceleración es máxima cuando la elongación es máxima y es nula cuando la partícula está en el origen.

4.5. Movimiento circular uniforme (MCU)

El movimiento circular uniforme, como bien dice su nombre, es un movimiento confinado en un círculo (con lo que tendremos que considerar dos dimensiones) y es a velocidad angular uniforme. Un momento, no os he hablado de las magnitudes angulares, ¿verdad? Pues nada, a soltar el rollo.

4.5.1. Magnitudes angulares

No os diré que las magnitudes angulares tienen que ver con ángulos, porque os considero lo suficientemente listos como para haberos dado cuenta ya. Pasemos directamente a describirlas:

Lo más básico de todo es hablar del ángulo, claro, porque uno dice "el ángulo es el ángulo" y sabe que tiene toda la razón, pero esto no basta para definirlo... ¿a qué demonio de ángulo me refiero? Pues bueno, como el caso que estamos tratando es el del movimiento circular, lo más que podemos hacer es referirnos al ángulo que forman dos puntos del círculo en cuestión con el centro del mismo. Es decir, dibujas un círculo y dos radios que vayan a dos puntos (por ejemplo, donde se encuentra el objeto ahora y donde se encuentra dentro de $5s$ y decimos que los radios forman entre si un ángulo θ, porque cuando hablamos de magnitudes angulares usaremos letras del alfabeto griego, no sé muy bien por qué, pero bueno, es la costumbre.

Las otras dos magnitudes angulares se definen por si solas una vez que diga sus nombres: velocidad angular (ω) y aceleración angular (α). Es lo mismo que en el caso "normal" (decir *lineal* es más riguroso, la verdad) pero con el ángulo, en vez de la posición.

Pues hale, ya está esto definido... pero parece un inconveniente tener dos tipos diferentes de magnitudes, ¿no? Que si velocidad lineal, que si velocidad angular... vaya rollo. ¡Pero no hay problema! Resulta que hay unas relaciones muy sencillas para pasar de unas a otras, ¡estupendo!

¿Os creíais que iba a ser así de fácil? Ja, ilusos... antes tengo que explicaros algo que no sé si sabéis: **el radián**. Del radián se dice que es la unidad natural para los ángulos, y es cierto; supongamos que queremos medir ángulos de modo tal que, al multiplicar el ángulo por el radio de la circunferencia nos de, inmediatamente, la longitud de arco, pues eso es el radián. ¿Y cómo sabemos cuánto vale? Nada más sencillo, si recordamos las clases de geometría de primaria la longitud de una circunferencia era $L = 2\pi r$, donde r es el radio, entonces, si decimos que $360°$ (que es el ángulo de una circunferencia entera) son 2π radianes ya está. Para pasar de grados a radianes y de radianes a grados no queda más que hacer reglas-de-tres.

Bien, pues, la longitud del arco de circunferencia no es más que el ángulo en radianes multiplicado por el radio r de la misma, ¿y qué pasa con la velocidad y la aceleración angulares? Pues si las calculamos (a partir, ojo, del ángulo en radianes) para calcular la velocidad lineal sólo tenemos que multiplicar la velocidad angular por el radio, y lo mismo para el caso de la aceleración angular, tenemos por tanto:

$$
\begin{aligned}
L &= \theta r, \\
v &= \omega r, \\
a &= \alpha r.
\end{aligned}
$$

4.5.2. El MCU

Pues lo dicho, vamos a ver cómo es el movimiento de un cuerpo con velocidad angular constante. Obviamente, si la velocidad angular no varía, entonces no hay aceleración angular, con lo cual ya tenemos $\alpha = 0$; las otra ecuación necesaria, la que nos da la posición (el ángulo girado) de la partícula en cada instante del tiempo se calcula igualito que en el caso del MRU, por lo tanto es $\theta = \theta_0 + \omega t$.

Mira tú que fácil, sólo eso... pues no, aún podemos complicarlo un poco, veámoslo.

4.5.3. Aceleración normal y tangencial

Ya vimos en la sección 2 que las aceleraciones eran las que modificaban la velocidad y/o dirección en la que se mueven las partículas. En el MCU no hay cambio de velocidad, pero hay un cambio constante de dirección (por eso el movimiento es circular). Esa aceleración tiene que ser hacia el centro de la circunferencia a narices, si fuese hacia cualquier otro punto el movimiento no sería circular, a saber qué forma tendría.

Veámoslo con otro de esos ejemplos cotidianos en los que pocos de nosotros nos paramos a pensar.

EJEMPLO

Tenemos un yo-yo con el hilo extendido y nos ponemos a hacerlo girar, no en la forma usual en la que se gira un yo-yo, sinó con el hilo totalmente extendido girando alrededor de nuestra mano. La cuerda del yo-yo ejerce una fuerza (y por tanto una aceleración) sobre éste dirigida en la dirección de la cuerda y hacia el centro de la circunferencia (justamente donde estamos agarrándolo con la mano). No cabe duda, el yo-yo gira en círculos. Si se nos ocurre soltarlo, esta fuerza (y esa aceleración) dejarán de existir y por tanto el juguete tenderá a seguir en la dirección en la que iba en ese momento (y por eso se escapa volando en el momento en el que soltamos la cuerda), dirección que coincide con la tangente a la circunferencia en ese punto, y acaba por definir un precioso tiro parabólico por culpa de nuestra colega la gravedad.

Vimos, pues, que esa aceleración que nos da un MCU es siempre perpendicular al movimiento que quiere describir la partícula (tangente a la circunferencia). Si nos leemos el "diccionario de sinónimos matemáticos" veremos que *perpendicular* también se dice *ortogonal* o *normal*. Por tanto, a esa aceleración, la llamamos *aceleración normal*.

Vamos a deducir matemáticamente cuanto valen esas aceleraciones... ¡yuju! ¡matemáticas "avanzadas"!

Supongamos que hay una partícula girando en círculos en el plano XY (el que forman los ejes x e y del sistema de coordenadas) a una distancia r del origen; esa distancia es siempre la misma, sin embargo el ángulo θ que forma el radio que une el origen con la partícula y el eje x varía con el tiempo (con velocidad constante ω, porque es un MCU .

El vector posición de la partícula es $\vec{r} = r\cos\theta\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}$, donde hay que recordar que como el ángulo varía con el tiempo tanto el coseno como el seno son funciones de t. La velocidad, derivando, es:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + r\cos\theta\hat{\jmath})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + r\cos\theta\hat{\jmath})\omega,$$

y la aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (-r\cos\theta\hat{\imath} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath})\omega^2 + (-r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + r\cos\theta\hat{\jmath})\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (-r\cos\theta\hat{\imath} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath})\omega^2 = -\omega^2\vec{r}.$$

Por lo tanto vemos que la aceleración tiene dirección radial (es decir, normal a la trayectoria, que es el círculo) con un módulo $a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$.

Si tuviésemos en cuenta la posible existencia de una aceleración angular α entonces en la aceleración aparecería otro término (ya que $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \neq 0$) proporcional a la velocidad (es decir, en dirección tangencial a la trayectoria) en un factor αr. Esta sería la aceleración tangencial $a_t = \alpha r = a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

4.6. Momento lineal

Os lo voy a definir sólo por dar una definición más formal de cómo calcular una fuerza, pero no voy a hablar de ello porque para ello existe una segunda parte de estos apuntes en los que hablo sobre energías, momentos y cosas que se conservan sin meterlas en la nevera, también los vais a necesitar leer para aprobar el curso.

Por el momento, nos llega con saber que el momento lineal se describe como $\vec{p} = m\vec{v}$.

4.7. Fuerza

Dijimos cuando hablamos de las leyes de Newton que $F = ma$. Esto no es del todo cierto, en realidad el enunciado correcto de la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.5}$$

En el caso de una sola dimensión y que la partícula sea de masa constante (que es lo habitual... lo de la masa, no lo de una dimensión) la ecuación se reduce a la simple $F = ma$. Si La masa es constante pero tenemos más dimensiones la expresión es $\vec{F} = m\vec{a}$ y si la masa no es constante la expresión se puede escribir como $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\vec{a}$.

Porque sí, existen casos en los que los objetos con que tratemos no tendrán masa constante, como, por ejemplo, un cohete que enviamos al espacio (¿o no pensaréis que esas toneladas de gas que suelta a chorro no pesan absolutamente nada?).

4.8. Equilibrio

¡Ei! Esto ya ni os lo tenía que decir, que debería estar más que claro a estas horas cuáles son las condiciones para que un objeto esté en equilibrio.

Aunque claro, tal vez no sepamos lo que entendemos por estar en equilibrio: una partícula está en equilibrio cuando no se mueve, ea. ¿Y qué condición necesitamos para que una partícula no se mueva? Pues que cuando la ponemos quita no se empiece a acelerar, obviamente.

Y si no se acelera es porque no hay ninguna fuerza que actúe sobre ella... pero claro, eso es muy grave, ¿cómo evitamos que, por ejemplo, el monitor de mi habitación que, evidentemente, está en equilibrio (pues no se mueve) sea influído por la fuerza de la gravedad? Obviamente no podemos, pero es que antes me expresé mal, donde dije "no hay ninguna fuerza que actúe sobre ella" quería decir "todas las fuerzas que actúan sobre ella se contrarrestan", de modo que la fuerza total (la suma de todas las fuerzas) sea igual a cero.

Y es que esto es otra cosa a tener en cuenta a la hora de resolver ejercicios, contad siempre con TODAS las fuerzas existentes.

Parte III

Dinámica

Capítulo 5

Nivel cuanto-sé

Bueno, ahora que ya hemos visto un montón de cosas bonitas usando vectores (poco) y derivadas (menos aún) es la hora de que os leáis el apéndice C y aprendáis a integrar si es que aún no sabéis. No os pido, claro, que dominéis el tema, porque hay integrales que se complican un güevo, pero sí que os aprendáis las de los polinomios, el seno y el coseno, que son las que vamos a usar aquí.

Vamos a ver cómo podemos recuperar todos los resultados que hemos venido obteniendo hasta ahora a partir de la segunda ley de Newton y ese maravilloso nuevo conocimiento que acabáis de obtener. ¿Lo que os acabo de decir no os impresiona? Sabiendo una sola ecuación vais a resumir estos apuntes, es lo bonito de la física, no cabe duda.

Antes de empezar simplemente decir que, matemáticamente, la integral es la operación inversa de la derivada (al igual que dividir es la operación inversa a multiplicar), por lo que, si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo, entonces la posición es la integral de la derivada respecto al tiempo, salvo una constante, como se indica en el apéndice C. Del mismo modo la aceleración es la integral de la velocidad respecto al tiempo.

Pues nada, empezamos, y seamos breves... la ecuación: $\vec{F} = m\vec{a}$ (os recuerdo que usaré magnitudes vectoriales directamente, que ya somos mayorcitos, el vector posición lo denoto como $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$).

5.1. Fuerza nula. El MRU

Imaginemos que tenemos que no hay ninguna fuerza actuando sobre la partícula. Según las leyes de Newton tenemos que la partícula debe conservar su velocidad o bien permanecer quieta si es que estaba quieta, veámoslo:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 0 = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = 0, \\ \vec{v} &= \int \vec{a}\,\mathrm{d}t = \int 0\,\mathrm{d}t = \vec{k}, \end{aligned}$$

donde $\vec{k}$ es un vector con sus componentes constantes (e iguales a las de la velocidad).

Efectivamente, obtenemos que la velocidad permanece constante, por ahora todo es consistente. Veamos ahora la posición de la partícula en cada momento:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t = \vec{r_0} + \vec{v}t.$$

En este caso el vector $\vec{r_0}$ nos da la posición inicial de la partícula.

Como vemos, integrando directamente a partir de la ecuación de Newton recuperamos las ecuaciones antes justificadas sin problemas, veamos cómo esto es así también con el MRUA.

5.2. Fuerza constante. Dinámica del MRUA

En este caso tenemos una fuerza constante, pero no nula, es decir, tal vez tengamos un dispositivo para ejercer sobre la partícula una fuerza siempre igual a $3N$, en este caso veamos qué ocurre con las ecuaciones:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$
$$\vec{v} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}t = \vec{v_0} + \frac{\vec{F}}{m}t,$$

donde $\vec{v_0}$ es un vector con sus componentes constantes que nos da la velocidad inicial de la partícula. Si volvemos a integrar obtenemos:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2.$$

Como vemos, por fin hemos justificado ese 1/2 que nos aparecía en la ecuación (/refeq:mrua2), a la vez que recuperamos la ecuación (3.2). Todo sigue cuadrando.

5.2.1. Tiro parabólico

Os he vuelto a mentir, que desgraciado soy... para justificar lo del tiro parabólico os voy a comentar la existencia de otra ecuación. En realidad, a partir de ahora os voy a introducir nuevas ecuaciones, que necesitaréis saber, no creáis, pero es que no todas las fuerzas son nulas o constantes y claro, habrá que ver cómo varían con la posición o con el tiempo (en general las veremos dependientes de la posición).

Pues bien, en el tiro parabólico lo que hay que tener en cuenta es, como no puede ser de otro modo, la fuerza de la gravedad. No tenéis por qué saber que la expresión de la ley de la gravedad de Newton es $\vec{F_{12}} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{u_r}$, de hecho es muy posible que no entendáis qué es esa u con una erre pequeñita al lado, pero bueno, nosotros sabemos que la ley de la gravedad nos atrae hacia el centro de la Tierra, así que nos podemos quedar sólo con el modulo.

En el estudio que nos importa, pues, nos quedamos con la parte que dice $F = G\frac{Mm}{r^2}$ donde $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ es la constante de la gravitación universal, $M \approx 6 \cdot 10^{24}kg$ es la masa de la Tierra, m la masa de la partícula y $r \approx 6380km$ la distancia del centro de la Tierra al centro de la partícula. Con estos datos obtenemos que $F \approx 9{,}83m$ y podemos considerar que en las cercanías de la superficie es constante, pues no conseguiremos lanzar piedras a más de cinco kilómetros de altura, me temo.

Con este dato podemos sustituír en las expresiones obtenidas en la sección anterior obteniendo una aceleración $a = \frac{F}{m} \approx 9{,}83m/s^2$, con lo que se podría repetir el estudio cinemático realizado en la sección 4.3.

5.3. Fuerza elástica. Dinámica del MAS

Cuando hablamos de fuerza elástica nos referimos, siempre, a una fuerza que sigue la ley de Hooke, es decir, $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$. Esta fuerza se denomina elástica porque es la que se da, básicamente, en partículas que están ligadas mediante un sistema elástico, como puede ser un peso que está atado a un muelle o una goma elástica (elástico porque va hacia adelante y hacia atrás), una puerta de saloon del lejano oeste, aproximadamente un péndulo, como veremos, etc.

¿Y qué significa eso? Veámoslo: la parte izquierda de la ecuación es muy simple, simplemente dice “la fuerza es igual a”, algo que ya esperábamos tal y como estamos haciendo estos apuntes; la parte de la derecha nos explica a qué es igual la fuerza. La k simplemente indica que es ‘proporcional a’ algo, es decir, una magnitud (en este caso $-\Delta x$) multiplicada por una constante. La diferencia $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x_0}$ es la posición que ocupa la partícula en un instante ($\vec{x}$) menos la posición que ocupa la partícula en su posición de equilibrio ($\vec{x_0}$).

EJEMPLO

Supongamos que tenemos una cuerda elástica y que nos la atamos a los pies mediante un sistema de arneses muy seguro, entonces, nos armamos de valor y nos tiramos por el puente.

Claro, la longitud de la cuerda está calculada para que no nos comamos el suelo, sin embargo nos acercamos bastante, llegamos a lo más cerca que jamás estaremos del suelo (menos mal que eso es lo más cerca) y luego empezamos a subir, llegamos a un punto bastante más alto que el anterior (aunque no tan alto como el puente desde el que nos tiramos) y volvemos a bajar. El movimiento es totalmente análogo al de la puerta del saloon de la sección 4.4.

Al final, terminamos de oscilar y nos quedamos quietos en una posición. Esa es la posicion de equilibrio (porque en ella no nos movemos por culpa de lo estirada que esté la cuerda).

El signo menos simplemente indica que la fuerza va a acelerar la partícula en el sentido contrario a la elongación (lo estirada que esté la cuerda), lo cual es lógico, imaginaos que nos tiramos del puente y cuanto más estiramos la cuerda más nos acelera en dirección al suelo en vez de acelerarnos hacia arriba (hacia el puente)... a ver quien sería el guapo que hiciese puenting.

Pues bien, para ver cómo se mueve esta partícula nos vamos a restringir al movimiento en una dimensión (es decir, sólo nos vamos a preocupar de un eje de coordenadas, por ejemplo, el eje x, por tanto tampoco trataremos con vectores); supongamos que la posición de equilibrio es aquella en la que está el origen de coordenadas (esto no nos debe causar mayor trauma, ya que el origen de coordenadas lo ponemos donde nos da la real gana, y poniéndolo ahí simplificamos un poquito el asunto (más bien nos ahorramos escribir seguido el $\vec{x_0}$, que sería constante). Entonces tenemos:

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{5.1}$$

Eso que se nos presenta ahí se llama ecuación diferencial ordinaria y no está a nuestro nivel el resolverla, sin embargo os voy a comentar que existe un teorema, y como es teorema es cierto, que dice que si encontramos una solución a esta ecuación, entonces esa solución es única, por lo que no nos importa cómo la encontremos, si analíticamente, si copiando al vecino o encontrándola debajo de una piedra, tan pronto como la tengamos el problema está resuelto.

En la sección 4.4 decíamos que describíamos el movimiento armónico simple con la solución $x = A\cos(\omega t + \phi)$, veamos si es solución válida a la ecuación (5.1). Derivemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \\
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x, \\
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 &= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x.
\end{aligned}$$

Con lo que vemos que la solución que encontramos en la sección 4.4 es solución a la ecuación (5.1) y además obtenemos la igualdad $\omega^2 = \frac{k}{m}$, que nos relaciona la frecuencia angular de la oscilación (número de ciclos que da la partícula por segundo, es decir, las veces que ocupa la misma posición, con la misma velocidad y la misma dirección cada segundo) con la masa de la partícula a través de una constante k. Esta constante se llama constante de elasticidad y no depende de la partícula, sinó del medio elástico, sea este un muelle, una cuerda de hacer puenting o un átomo vibrando. Sí, sí, un átomo vibrando, estas cosas tienen unas aplicaciones más avanzadas de lo que parece a simple vista.

5.3.1. El péndulo

Bueno, como en estos apuntes no he puesto ni una sola figura (no es que esté presumiendo de ello, simplemente estoy comentando lo vago que soy) esta parte tal vez nos resulte algo abstracta en un par de puntos, pero nada que no pasásemos ya cuando descompusimos el vector velocidad en el tiro parabólico de la sección 4.3.

Empecemos definiendo el péndulo: un péndulo es una partícula con masa m que está unida mediante un cuerpo de longitud l (sea este una cuerda, una cadena o una barra) que puede girar en torno a un punto.

El péndulo, como el que usan algunos hipnotizadores, tiene la peculiaridad de que siempre están oscilando en el mismo plano, es decir, si está oscilando, por ejemplo, paralelo a la pared que tengas más cerca, sabes que siempre lo hará paralelo a ella y que no empezará a hacer cosas raras[1]. Debido a esta peculiaridad para el estudio del péndulo nos llega con pintarlo en un papel, como aparece en tus apuntes de clase o en el libro de texto, y dar tres magnitudes, evidentes, para su estudio: una es la longitud de la varilla, cadena, o lo que sea; la otra es la masa de la partícula que pendulea... y la tercera, sin duda alguna, el ángulo que le damos inicialmente para que el péndulo oscile, porque si no oscila vaya asco de péndulo, que lo único que es es un peso colgando, como el que ponen en las obras para hacer las paredes rectas.

Pues venga, saquemos la ecuacioncilla que nos determine el movimiento del péndulo. Sabemos que el péndulo lo ponemos en un ángulo inicial (es decir, que la cuerda hace un ángulo con la dirección vertical) y después empieza a hacer un movimiento circular, debido a la cuerda que une al peso con un punto. Pues bien, las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando lo soltamos son dos: la tensión del hilo sobre el peso (la que hace que el movimiento sea circular) y la otra fuerza, sin duda alguna, su peso (o sea, la fuerza de la gravedad), que expresamos como $\vec{F} = m\vec{g}$.

Si el ángulo que esté formando la cuerda del péndulo lo designamos como θ entonces podemos descomponer el peso en dos componentes, que llamaremos *normal* y *tangencial*. Esto, sin duda alguna, tiene relación con las aceleraciones normal y tangencial de todo movimiento circular. Como siempre que tenemos un ángulo, usaremos los senos y los cosenos del ángulo, en este caso para las dos componentes. La componente tangencial será pues $F_t = mg \operatorname{sen}\theta$ y la componente normal $F_n = mg\cos\theta$, el por qué la tangencial es la que va con el seno y la normal la que va con el coseno se ve fácilmente con alguno de esos dibujos que yo no puse en los apuntes.

Con la componente normal del peso y la tensión de la cuerda podemos escribir la ecuación de Newton correspondientes como $ma_n = T - mg\cos\theta$, con lo que podemos calcular la tensión que soporta la cuerda (que dependerá del ángulo que forme ésta, ¿es ello lógico?.

En la dirección tangencial encontramos la ecuación de Newton siguiente: $ma_t = -mg\operatorname{sen}\theta$, como la relación angular entre la aceleración tangencial y la aceleración radial es $a_t = \alpha l$, como vimos en la sección 4.5.1, donde $\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ y l es la longitud del hilo, que es el radio de giro. Por lo tanto la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$m\alpha l = -mg\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Esta ecuación diferencial es la que describe el movimiento del péndulo, sin embargo encontrar una

[1]Si alguno fue alguna vez a un museo de la ciencia y vio un péndulo que sí que gira y va tirando unos barrotes de hierro que no se preocupe, que esto sigue siendo cierto, el péndulo gira en el mismo plano siempre, lo que pasa es que la Tierra gira.

solución para ella es muy complicado. Sin embargo, tenemos un pequeño truquito para cuando los ángulos implicados son pequeños. No os puedo explicar por qué, pero cuando el ángulo es pequeño entonces se cumple que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (¡recuerda, el ángulo en radiantes!). En ese caso la ecuación que nos queda no es otra que la del movimiento armónico simple, donde se cumple que $\omega^2 = \frac{g}{l}$, es decir, la frecuencia de oscilación del péndulo no depende de cuánto peso le colguemos al mismo, sinó de la longitud de la cuerda con la que estemos trabajando, vaya vaya, eso parece contraintuitivo, pero tenemos un modo muy sencillo de comprobarlo, ¿no es cierto?.

5.4. Dinámica del MCU

Cuando vimos el MCU comprobamos que, aunque la velocidad de la partícula no cambiaba de módulo, sí que cambiaba de dirección continuamente (más le vale si quiere hacer un movimiento circular). Ese cambio en la dirección viene dado por una aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia con módulo igual a $a_n = v^2/r$.

Según la segunda ley de Newton, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula va a ser igual a $F = ma_n$.

5.4.1. Fuerzas centrífuga y centrípeta

Cuando explicábamos la primera ley de Newton en la sección 2 decíamos que cuando el coche curvaba nuestro cuerpo tendía a seguir en línea recta, por eso nos íbamos hacia los lados. Por supuesto, esto es visto desde fuera, imaginaos, por un momento, que tenemos una cámara en el coche y en vez de notar que nos vamos hacia un lado del coche sólo vemos que el ocupante del coche se mueve hacia un lado, sin saber el por qué. Diremos, pues, que como esa persona se mueve hacia a un lado debe haber una fuerza que lo impulse hacia ese lado. Es lo que llamamos *fuerza centrífuga*.

Esta fuerza centrífuga es una fuerza virtual. ¿Qué quiere decir esto? Pues que no es una fuerza real, claro. Me explico... una fuerza decimos que es "real" cuando hay una causa física para ella, sea la gravedad, el electromagnetismo, una tensión de una cuerda, un muelle estirado... sin embargo nada de eso hace que el pobre personaje de dentro del coche se mueva, es debido a la ley de la inercia y por tanto, la fuerza que hace que se vaya a un lado no es otra cosa que un efecto debido a que la cámara está también moviéndose, en lo que se llama un sistema de referencia no incercial.

Por lo tanto, la fuerza centrífuga es una fuerza que nos empuja hacia fuera de la curva y que tiene la siguiente expresión: recordamos (porque lo vimos hace un minuto en la sección anterior) que en la dinámica del MCU aparece una fuerza según la ley de Newton $F = ma_n$, pues bien, esa es la fuerza centrífuga, por lo tanto tenemos que $F_c = m\frac{v^2}{r}$.

Pero claro, sobre el coche también aparece una fuerza que lo hace girar, una fuerza que hace que se desvíe hacia la parte de dentro de la curva. Sin embargo, nosotros, que estamos en la parte de dentro del coche no nos vemos desviados por ella (sinó no nos echaríamos hacia fuera de la curva): es la llamada *fuerza centrípeta*. Esta fuerza centrípeta va dirigida hacia la parte de dentro de la curva y es real, igual a la centrífuga pero en sentido contrario.

Repasemos, el coche gira merced a una fuerza que lo hace curvar: la fuerza centrípeta. Sin embargo, los que vayan dentro del coche notarán una fuerza que los empujará hacia fuera de la curva (debido simplemente a que el coche gira, no a que algo los empuje) y que es la centrífuga. Además son iguales pero de sentido contrario.

El uso de una fuerza u otra cuando os pongáis a hacer el diagrama de fuerzas al resolver un ejercicio depende de si consideráis que estáis viendo el asunto "desde fuera" o "desde dentro"; es decir, en el ejemplo del coche, si consideráis que estáis estudiando el movimiento del coche desde fuera debéis tener en cuenta la fuerza centrípeta. Si estáis mirando por la cámara y queréis estudiar el movimiento de las personas debéis poner la centrífuga. Es un rollo, lo sé.

Parte IV

Apéndices

Apéndice A

Vectores

A.1. Definición

Hay muchos modos de definir un vector, sin embargo no creo que sea necesario que os explique mucho cómo se hace pues ya lo tendríais que haber dado en matemáticas hace un curso o dos.

Los vectores que a nosotros nos van a interesr son segmentos orientados, es decir, segmentos de recta que tienen un módulo (que nos da información acerca de cómo de largos son), dirección (que nos da precisamente eso, la dirección sobre la que está orientado el segmento) y sentido (que nos indica hacia qué lado de la dirección está orientado, es decir, nos da un punto delantero y un punto trasero del vector).

Ahora pasemos al espacio tridimensional para explicar el concepto de sistema de coordenadas, vamos a tener que dar la definición de origen y de ejes coordenados.

A.2. Componentes

EJEMPLO

Tomemos como ejemplo la habitación en la que dormimos. Supongamos que tomamos un punto cualquiera como origen, para este ejemplo, una esquina cualquiera del suelo. Ahora, para explicar donde está la mesa, donde el lápiz, donde la lámpara, tendríamos que dar algunas cantidades estratégicamente elegidas para que nos señalen de forma inequívoca la mesa, el lápiz o la lámpara. Para ello vamos a escoger tres dimensiones muy peculiares, a una le llamaremos dirección x, a otra dirección y y a la otra dirección z. Para ello tomaremos las tres direcciones que hacen de frontera entre el suelo y una pared, el suelo y la otra pared y las dos paredes (por eso escogimos de origen una esquina de la habitación).

Pues bien, diciendo cuantos centímetros (o metros, o pulgadas, o dedos índices) hay que recorrer en cada dirección para encontrarse con la mesa, el lápiz o la lámpara ya tenemos las cantidades deseadas.

Esas cantidades especiales de las que hablaba antes son las *componentes del vector*. Las direcciones x, y y z son los *ejes coordenados*, y vamos a escoger el sistema de ejes coordenados cartesiano (llamado así en honor a Descartes) en la que, por ejemplo, si el eje positivo de las x está hacia abajo en el folio, el eje positivo de las y estará hacia la derecha y el eje positivo de las z hacia arriba en el folio. Las partes negativas del eje estarán en las mismas direcciones, pero en el sentido contrario.

Una vez dicho esto vamos a introducir un poco de notación. Para indicar las direcciones anteriores vamos a usar los símbolos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, y los sentidos nos vendrán dados por el signo de las componentes (que denotaremos "x, y y z, espero que esto no os lleve a confusión). Por tanto un vector se escribirá generalmente como $\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. El módulo de los vectores, conocido esto, se calcula como $|\vec{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

A.3. Operaciones básicas

A.3.1. Suma

La suma de dos vectores $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ y $\vec{w} = w_x\hat{\imath} + w_y\hat{\jmath} + w_z\hat{k}$ es un nuevo vector $\vec{u}$ tal que $\vec{u} = (v_x + w_x)\hat{\imath} + (v_y + w_y)\hat{\jmath} + (v_z + w_z)\hat{k}$, es decir, se suman las componentes y ya está. La resta se hace igual, pero restando las componentes en vez de sumándolas.

A.3.2. Producto por un escalar

Cuando multiplicamos un vector $\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ por un escalar (un número normal) λ cualquiera, lo que se hace es multiplicar cada componente por k, por tanto: $\lambda\vec{v} = \lambda x\hat{\imath} + \lambda y\hat{\jmath} + \lambda z\hat{k}$

A.3.3. Producto escalar

Como indica su nombre, el producto escalar es un producto tal que tomamos dos vectores, los multiplicamos y el resultado es un escalar. Se denota con un punto en medio de los dos vectores que se multiplican y el resultado es la suma del producto de las componentes correspondientes, o de un modo simbólico: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$.

Además también se cumple que $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman los dos vectores que se multiplican escalarmente. Esto nos da una relación del ángulo que forman dos vectores, lo cual es bastante interesante.

Bueno, como introducción a los vectores llega bien, es poco y no es riguroso, pero es lo que hay.

Apéndice B

Derivadas

B.1. Matemáticamente hablando

La derivada, desde un punto de vista matemático, no es más que una operación, denotada como $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ ó $f'(x)$ y se trata de un límite tal como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

o diciéndolo a lo bruto[1]: el valor de la derivada de una función en un punto es el valor de la función un poquito muy poquito más adelante del punto menos el valor de la función en ese punto partido de ese poquito.

EJEMPLO

Calculemos la derivada de x^2 siguiendo esa definición:

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2hx - x^2}{h} =_{h\to 0} h + 2x = 2x.$$

Pues eso, no os voy a aburrir contándoos un montón de cosas para las que sirven las derivadas, eso ya lo daréis en la clase de matemáticas. Yo simplemente os voy a dar las tres derivadas que usaremos siempre en estos apuntes y tres propiedades esenciales:

La primera propiedad es que la derivada es lineal, es decir, si tenemos que hacer la derivada de la función $\lambda f(x) + \nu g(x)$ donde λ y ν son constantes (números), entonces $\frac{\mathrm{d}(\lambda f(x)+\nu g(x))}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \nu \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$.

La segunda propiedad es la regla de la cadena; si tenemos que derivar $f(g(x))$ (una función de otra función) el resultado es $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

La tercera propiedad nos dice cómo se deriva un producto de funciones, de este modo $\frac{\mathrm{d}f(x)\cdot g(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Las derivadas que usaremos son:

Función	**Derivada**
$k = cte.$	0
x^n	nx^{n-1}
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$

[1] Lo que significa que si me lee un matemático me busca para castrarme.

B.2. Un sentido más físico del asunto

Ahora haré una pequeña justificación del uso de la derivada para magnitudes físicas que implican el cambio con alguna variable (generalemete el tiempo) de un modo un poco chapucero (es decir, sin rigor). Para ello hagamos el ejemplo de la velocidad.

Sabemos perfectamente que la velocidad media es el espacio recorrido partido por el tiempo, estamos hartos de verlo en motociclismo, fórmula 1, ciclismo sin moto, atletismo, nosotros en autopista, etc. Si llamamos Δs al espacio recorrido y Δt al tiempo que tardamos tendremos, pues, que la velocidad media es $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Pero para expresar la velocidad real en cada instante la media no nos sirve. Si recorremos 100 metros en 5 segundos y otros 100 metros en 15, la media nos dice que vamos a $10m/s$, pero en un caso vamos a $20m/s$ y en el otro a $6{,}66m/s$. Por tanto, necesitamos tomar un intervalo de tiempo menor, de modo que el límite hacia el que tiende la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$ nos dará la velocidad de la partícula en el instante t: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Ahora bien, el espacio recorrido en cada instante será una función del tiempo, de modo que la diferencia entre el espacio final y el espacio inicial (Δs) que estamos utilizando se podrá escribir como $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$, es decir, una función en un tiempo mas el tiempo que estuvimos contando la velocidad menos la función al tiempo que teníamos antes de empezar a contar la velocidad. Una vez hecho esto tenemos que:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

que no es más que la definición de la derivada de la función $f(t)$ haciendo el cambio de nomenclatura $\Delta t = h$.

Apéndice C

Integrales

Como ya dije muchas veces en estos apuntes, mi intención no es hacer un texto autosuficiente, sinó un complemento a los apuntes de clase, por eso no os explico nada a fondo de las integrales, sólo os digo que son la operación inversa de las derivadas y por eso mismo sólo os doy una pequeña tabla de integrales:

Función	**Integral**
0	$k = cte.$
$k = cte \neq 0$	kx
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$