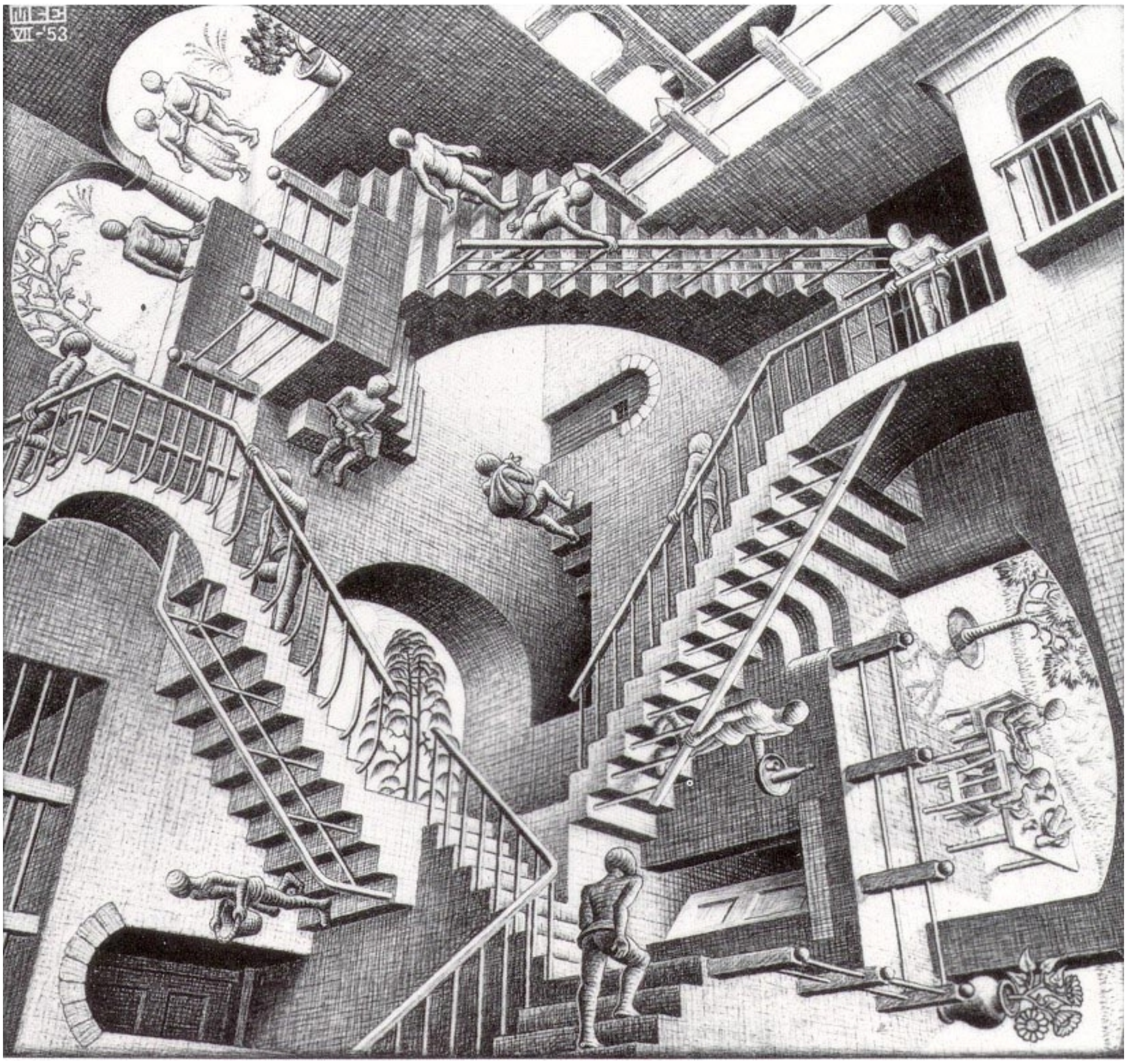
# Introducción a la Relatividad Especial

Ricardo Torres Andrés*



Relativity, Maurits Cornelis Escher, 1953.

# Índice



*Es menester y voluntad agradecer la colaboración de Daniel Tabas y Eduardo López en cuestiones relativas a la corrección tanto del documento en sí como de su apariencia. Gracias a ambos.

# 1. Introducción a la Relatividad Especial.

Puede resultar interesante revisar algo de análisis tensorial a lo largo del documento ([4] es un muy buen libro de consulta), pese a que se ha intentado que no se precise más que algo de mecánica clásica básica y análisis matemático. En algunos momentos se indican ciertos detalles o puntos que no son tratados en el texto y que tienen como finalidad estimular la curiosidad del lector acerca de estos temas; eg: renormalización electrodinámica de la masa, desintegración de muones, variedades diferenciables, etc.

Un aspecto importante en cuanto a *notación* es el siguiente: los índices con carácteres latinos tienen un recorrido $1, 2$ y $3$ (componentes "espaciales"); mientras que los índices griegos recorren $0, 1, 2$ y $3$.

## 1.1. Breve introducción matemática.

A continuación se recogen ciertos conceptos matemáticos básicos que ayudarán a tratar con más solvencia el tema. No pretenden ser definiciones rigurosas sino más bien aproximaciones, en la medida de lo posible, a éstas mediante ejemplos sacados de la física.

### 1.1.1. ¿Qué es un grupo?

Un grupo es una estructura algebraica que satisface, respecto de una determinada ley de composición interna, las propiedades de asociatividad y existencia de elementos neutro e inverso. Obsérvese que el carácter interno de la ley de composición exige por si misma que el producto de dos elementos del grupo esté también en el grupo.

Es importante destacar que un grupo lo es solo respecto a la operación binaria que se defina sobre él, así que no tiene sentido hablar de un grupo sin explicitar respecto a qué operación.

La física abunda en ejemplos de este tipo de estructuras y se convierte en tema estrella al tratar con simetrías de sistemas físicos en mecánica cuántica (grupos simétricos o de permutaciones, grupos de color, etc.) o clásica (grupo de Galileo, que veremos más adelante; grupo simpléctico, etc.).

Para más información sobre grupos y su aplicación a la física, consúltense [5, 6].

### 1.1.2. ¿Qué es un tensor?

Existen principalmente dos formas de acometer la introducción al concepto de tensor. Una, clásica, y más operativa; consiste en determinar las propiedades de transformación de vectores bajo transformaciones de coordenadas y extender el tratamiento hacia generalizaciones de los mismos. Otra, mucho más formal, consiste en dotar a ciertos espacios de estructuras diferenciables (lo que las convertirá esencialmente en *variedades diferenciables*) susceptibles de ser cubiertas por mapas o cartas que permitan establecer sistemas de coordenadas, y definir lo que uno entiende por tensores tangentes a estos espacios en cada punto. A partir de esto se estudian las relaciones entre las componentes de estos objetos para distintas cartas compatibles que tengan una intersección no nula sobre la variedad.

Nosotros nos quedaremos en la definición más operativa y diremos que un tensor $r$ veces contravariante y $s$ veces covariante , o ($r$, $s$)-tensor, es un objeto cuyas componentes se transforman bajo cambios de coordenadas admisibles en la forma

$$T^{i'_1\ldots i'_r}_{j'_1\ldots j'_s} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \tag{1}$$

donde se ha hecho uso del convenio de Einstein de índices repetidos arriba y abajo (es decir $a^i b_i = \sum_i a^i b_i$ desde $i = 1$ hasta la dimensión del espacio donde estén definidos).

Es importante no cegarse por la aparente complejidad de la expresión anterior. Lo realmente significante es que existen magnitudes que se comportan, bajo cambios de coordenadas, como vectores tangentes; y otras que se transforman de modo contrario (como gradientes, esencialmente). Lo demás es solo una generalización extendida a cualquier número de índices.

- Es vital, también, darse cuenta de que las componentes de un tensor no dan ningún tipo de información: es necesario decir, además, respecto a qué sistema de referencia están calculadas o medidas. No tiene sentido decir que un vector es $(1, 9, 3)$ si no se dice respecto a qué base.

- Uno de los principales atractivos del empleo de formalismo tensorial en la física radica en que si una ley está formulada en términos tensoriales para un cierto sistema de coordenadas, digamos $R^{ijk\cdots} = 0$, entonces $R^{i'j'k'\cdots} = 0$ en cualquier sistema de coordenadas, como puede desprenderse fácilmente de la ley de transformación.

- Un tipo particular de tensor lo constituyen los escalares ó (0, 0)-tensores: *objetos sin índices* que no se transforman bajo cambios de coordenadas.

- El uso de tensores es ubicuo en prácticamente todas las ramas de la física: vectores tangentes a una curva, que son (1, 0)-tensores o simplemente vectores; el gradiente de una función, que se comporta como un (0, 1)-tensor o covector; tensor de inercia en mecánica clásica, que permite calcular el momento de inercia respecto de cualquier eje a partir de la construcción del tensor en el sistema de ejes principales (el más sencillo y que muestra explícitamente más simetrías del cuerpo); tensor electromagnético, que es la base de todo el formalismo electromagnético clásico y que permite calcular las componentes de los campos eléctrico y magnético en cualquier sistema de referencia; tensores de curvatura en relatividad general; y un largo etcétera.

- Existe una confusión importante en cuanto a los tensores con dos índices. Cierto es que las componentes de todo tensor de este tipo pueden ser representadas usando una matriz cuadrada, pero ésto no significa que toda matriz sea un tensor. Asimismo, no todo objeto con índices es un tensor (un ejemplo claro de esta situación lo ofrecen los símbolos de Christoffel ${\Gamma^i}_{jk}$ en las conexiones afines de la geometría diferencial).

- Estaremos interesados en un tipo particular de operación tensorial exterior muy importante en física denominado contracción que consiste en la repetición de dos índices de distinto tipo (covariante,contravariante). Por ejemplo, sean $T^\mu$ y $S_\nu$ las componentes de un vector y un covector en una determinada base, entonces su contracción es el (0, 0)-tensor

$$T^\alpha S_\alpha$$

es decir, un escalar.

Podemos generalizar la contracción de cualquier par de índices de distinto tipo para $(r,\, s)$-tensores. Asimismo, una propiedad interesante es que la contracción es independiente de la base elegida, lo que resulta compatible con el hecho de que la contracción de un vector y un covector sea un escalar (invariante bajo cambios de base).

## 1.2. Mecánica no relativista.

### 1.2.1. ¿Qué es un sistema inercial?

Un sistema de referencia se denomina inercial si, desde su punto de vista, se satisface la primera ley de Newton, es decir, todo cuerpo libre de la influencia de fuerzas se mueve con velocidad constante. Evidentemente, dos sistemas inerciales se mueven con velocidad relativa constante.

### 1.2.2. ¿Qué son las transformaciones de Galileo?

En mecánica clásica, los observadores están de acuerdo respecto a la simultaneidad de sucesos, es decir, dos referenciales inerciales medirán el mismo tiempo salvo traslaciones del origen de tiempos (es decir, salvo sincronizaciones distintas de sus relojes).

Las leyes de transformación para la posición y el tiempo entre sistemas inerciales se denominan transformaciones de Galileo y comprenden las traslaciones del origen de tiempos y las traslaciones espaciales a velocidad constante: si un sistema de referencia observa un objeto que se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto de aquel, y existe otro sistema de referencia inercial con velocidad relativa al anterior $\vec{w}$, entonces la velocidad del objeto respecto de éste último es

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{w}.$$

Esta relación constituye el teorema de adición de velocidades en mecánica clásica.

### 1.2.3. ¿Qué es el grupo de Galileo?

El grupo de Galileo está formado por el conjunto de transformaciones de Galileo entre sistemas inerciales respecto a la composición de transformaciones.

Toda transformación de Galileo lleva de un sistema inercial a otro sistema inercial y viceversa.

### 1.2.4. Principio de Galileo. Invariancia y leyes de Newton.

El principio de relatividad de Galileo establece que todas las leyes de la mecánica clásica son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.

La esencia de este principio reposa sobre el carácter instantáneo de la propagación de señales en mecánica clásica o newtoniana y, como veremos, necesitará de correciones al considerar el carácter finito de dicha propagación. Las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo siempre que la masa del sistema permanezca constante.

Señalemos que este principio de relatividad exige ya una invariancia de las ecuaciones de la física bajo cierto tipo de transformaciones de coordenadas y anuncia que el tratamiento tensorial será una muy buena opción para describirla. De hecho, no en vano las ecuaciones de Newton están formuladas en términos de vectores.

## 1.3. Relatividad Especial.

### 1.3.1. Postulados. Transformaciones de Lorentz.

La física relativista comienza con el enunciado de dos postulados básicos

**Postulado 1** (Principio de relatividad)**.** *Todas las leyes de la física, en ausencia de fuerzas gravitatorias, son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

Obsérvese que, a diferencia del principio de relatividad galileano, ya no se hace mención única a la mecánica sino a todas las leyes físicas salvo la gravitación.

**Postulado 2.** *La velocidad de la luz en el vacío es constante e igual en todo sistema de referencia inercial.*

Es éste el verdadero punto de partida de la nueva física relativista puesto que el caracter finito constante de la velocidad de la luz implica que las interacciones se transmiten con una cierta velocidad y, quizá más importante, el tiempo y el espacio se entremezclan. ¿De qué forma? Para responder a esta pregunta es posible considerar la emisión de una señal luminosa emitida por un cierto sistema de referencia (no primado) en un momento determinado $t_1$ y su recepción, en otro tiempo distinto $t_2$ por parte de otro inercial (primado) en movimiento relativo respecto a áquel. A tenor del segundo postulado es posible escribir

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (\vec{x}'_2 - \vec{x}'_1)^2.$$

Consideremos una transformación unidimensional (por simplicidad y sin pérdida de generalidad) lineal en posiciones y tiempos (traducción al formalismo de las hipótesis de isotropía espacio-temporal) para la relación $\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}, t)$, $t' = t'(\vec{x}, t)$ de la forma

$$t' = \gamma(v)[f(v)x + t]$$
$$x' = a(v)(x - vt)$$

$$y' = y$$
$$z' = z.$$

Con un sencillo tratamiento se llega a que

$$f = \frac{-v}{c^2}, \qquad a = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de modo que las transformaciones resultan ser

$$t' = \gamma(t - (v/c^2)x)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

que son conocidas como transformaciones de Lorentz. Su generalización tridimensional puede obtenerse rotando la solución unidimensional mediante una matriz ortogonal obteniéndose

$$t' = \gamma(t - c^{-2}\vec{v}\vec{x})$$
$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)(\hat{v}\vec{x})\hat{v} - \gamma\vec{v}t$$

donde $\hat{v}$ es un vector unitario en la dirección de la velocidad relativa a ambos sistemas de referencia.

### 1.3.2. ¿Cómo se suman velocidades en el marco de la RE?

Derivando la transformación de Lorentz para las coordenadas espaciales respecto a cualquiera de los tiempos, $t'$ o $t$, y llamando $\vec{V} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ y $\vec{V}' \equiv \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ obtenemos

$$\vec{V}' = \frac{\vec{V} + (\gamma - 1)(\hat{v}\,\vec{V})\hat{v} - \gamma\vec{v}}{\gamma\,(1 - c^{-2}\vec{v}\,\vec{V})} \tag{2}$$

que representa el teorema de adición de velocidades en relatividad especial. Obsérvese que en el límite no relativista o clásico ($\frac{v}{c} \to 0$) se recupera la ley de adición galileana.

Las transformaciones de Galileo son, pues, el límite clásico de las transformaciones de Lorentz.

### 1.3.3. ¿Qué es el espacio cuadridimensional de Minkowski? ¿Qué es el intervalo espaciotemporal?

El espacio de Minkowksi es un espacio vectorial cuadridimensional similar a $\mathbb{R}^4$ cuyos elementos o puntos se denominan sucesos y tienen la forma $x^\mu = (ct, \vec{x})$. Los vectores cuadridimensionales que se definen en este espacios son denominados genéricamente cuadrivectores.

Se define el intervalo espacio-temporal entre dos sucesos del espacio de Minkowski $(\vec{x}_1, t_1)$ y $(\vec{x}_2, t)$ como la cantidad

$$s_{12}^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$$

que responde a algo así como el equivalente de la distancia euclídea entre dos puntos. Es de vital importancia la introducción de una métrica que permita resolver los problemas relativos a distancias espacio-temporales.

El elemento de línea entre dos sucesos infinitesimalmente próximos toma la forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$$

y constituye un invariante bajo las transformaciones de Lorentz ya que, como vimos, las hemos construido precisamente de modo que dejen invariante el intervalo espacio-temporal entre dos sucesos cualesquiera.

La métrica (un (0, 2)-tensor simétrico regular) puede entonces considerarse como $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Obsérvese que la elección de la *signatura*[1] $(-+++)$ es arbitraria ya que podría haberse tomado una del tipo $(+---)$.

La introducción de este objeto permite calcular normas de cuadrivectores y establecer un isomorfismo entre índices covariantes y contravariantes definidos en el espacio de Minkowski (que resulta ser una variedad diferenciable cuadridimensional) de modo que tengan sentido las operaciones de subir y bajar índices del siguiente modo

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \qquad x^\alpha = \eta^{\alpha\beta} x_\beta$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ son las componentes del inverso del tensor métrico, que coincide con los elementos de la métrica propiamente dicha. El producto escalar de cuadrivectores es entonces

$$\langle x^\mu y_\mu \rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3.$$

El análisis pormenorizado de éstas cuestiones escapa al objetivo de esta introducción y puede ser encontrado en cualquier libro de análisis tensorial (ver, por ejemplo, [4] ).

[1] La signatura de una métrica viene caracterizada por el signo de sus elementos diagonales.

Un hecho especialmente importante es que en un espacio de esta forma (cabe decir que la signatura $(- + ++)$ de la métrica le otorga el calificativo de pseudoriemanniana) es posible tener vectores no nulos de norma nula, e incluso vectores de norma negativa sin que por eso debamos alarmarnos.

### 1.3.4. ¿Cómo actuan las transformaciones de Lorentz sobre cuadrivectores?

Las transformaciones de Lorentz pueden escribirse usando una notación matricial similar a la usada en un cambio de coordenadas. En efecto, sea $x^\mu$ un cuadrivector contravariante, entonces una transformación de Lorentz actúa sobre él, como hemos visto en la reglas de transformación tensorial en la forma

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu} x^\mu$$

donde las $\Lambda^{\mu'}_{\ \mu}$ pueden calcularse a partir de la expresión para una transformación de Lorentz general que vimos anteriormente sin más que tener en cuenta el convenio de sumación que estamos usando. Para cuadrivectores covariantes se tiene

$$x_{\mu'} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \mu'}\, x_\mu.$$

La expresión de la invariancia del elemento de linea infinitesimal mediante transformaciones de Lorentz se traduce casi inmediatamente en la condición, expresada en lenguaje matricial,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

lo que indica que las matrices del grupo de Lorentz tienen determinante $\pm 1$ (en relatividad especial, como en electromagnetismo, se trata el subgrupo ortocrono propio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ cuyos elementos poseen, entre otras, la propiedad de tener determinante 1).

### 1.3.5. ¿Qué es el grupo de Poincaré?

Es el grupo que identifica las simetrías de un sistema en relatividad especial. Está formado por rotaciones espacio-temporales (*boosts* o transformaciones de Lorentz puras, más rotaciones espaciales o giros) y traslaciones espacio-temporales.

En total consta de 10 parámetros libres: 6 asociados a rotaciones espacio-temporales (tres correspondientes a, por ejemplo, ángulos de Euler; y 3 más para cada una de las componentes de la velocidad en la transformación de Lorentz hacia otro inercial) y 4 de traslaciones.

### 1.3.6. ¿Qué es el sistema de referencia propio? ¿Qué es el tiempo propio?

El sistema de referencia propio es de especial utilidad en relatividad especial. Es aquel que se mueve solidario a la partícula respecto a un inercial dado y desde el que, evidentemente, la partícula permanece en reposo.

El tiempo propio de una partícula es el tiempo medido por un observador que está anclado al sistema de referencia solidario con la partícula. Evidentemente se han de cumplir las transformaciones de Lorentz por lo que la relación entre el tiempo medido por un observador en un referencial dado y el tiempo propio es

$$t' \equiv \tau = \frac{t}{\gamma}$$

o, infinitesimalmente,

$$\gamma\, d\tau = dt.$$

Una consecuencia interesante es que el tiempo propio siempre es menor que el tiempo medido en cualquier otro inercial. Un hecho no menos importante relacionado con el concepto de tiempo propio son las aparentes paradojas en la desintegración de mesones.

### 1.3.7. Cuadrivelocidad y cuadriaceleración.

A partir del concepto de tiempo propio se define la cuadrivelocidad como el cuadrivector

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

y la cuadriaceleración como

$$b^\mu \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}.$$

Sean un sistema de referencia inercial y el sistema de referencia propio, entonces, desde el sistema de referencia dado, la partícula tiene una cuadrivelocidad $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula respecto de este sistema. Asimismo, desde el sistema de referencia propio, la cuadrivelocidad de la partícula es $u^\mu_P = (c, \vec{0})$. Evidentemente podemos pasar de un referencial a otro sin más que aplicar una transformación de Lorentz con velocidad $\vec{v}$ a la cuadrivelocidad medida respecto del inercial no propio

$$u^\mu_P = \Lambda^\mu{}_{\mu'}\, u^{\mu'}.$$

Puede demostrarse que

$$b^\mu = (\gamma^4 \vec{v}\vec{a}/c, \gamma^4(\vec{v}\vec{a})\vec{v}/c^2 + \gamma^2\vec{a}) \tag{3}$$

donde $\vec{a}$ es la aceleración de la partícula medida desde el sistema no propio; y que

$$b^\mu u_\mu = 0,$$

es decir, cuadrivelocidad y cuadriaceleración son siempre perpendiculares.

### 1.3.8. ¿Pueden tratarse sistemas no inerciales en relatividad especial?

Un error ampliamente difundido consiste en concluir que la teoría especial de la relatividad no puede tratar sistemas no inerciales, es decir, acelerados. Einstein, Poincaré y compañía trabajaron extensamente sobre sistemas inerciales y de ahí que se haya generalizado, e incluso restringido, su uso para el tratamiento de este tipo de sistemas. Sin embargo es posible generalizar estos resultados del mismo modo que se generalizan las ecuaciones de Newton en el caso de sistemas no inerciales (Teorema de Coriolis). Desde luego se complica el formalismo y la métrica, antes *plana*[2], se convierte en una métrica curva cuyos elementos son, en general, funciones de las coordenadas del espacio de Minkowski.

Un caso particularmente fácil de tratar es el del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado relativista. Para ello basta considerar el sistema de referencia propio como un conjunto de sistemas de referencia inerciales infinitesimales ligados a la partícula y con su misma velocidad. A partir de las transformaciones de Lorentz para la velocidad (2) es posible deducir las relaciones instantáneas para la aceleración entre ambos sistemas de referencia llegando a una ecuación diferencial de primer orden en variables separadas de la forma

$$dt = dv\,\frac{\gamma(v)^3}{a}$$

donde $a$ es la aceleración constante que posee la partícula respecto del inercial no propio.

[2]La introducción de este término no es para nada trivial; de hecho es necesario un tratamiento bastante más profundo del asunto para explicar correctamente lo que se entiende por una métrica plana. Para el lector iniciado una métrica plana es aquella para la que el tensor de curvatura es idénticamente nulo. Uno está tentado de pensar que el hecho de que los coeficientes de una métrica dependan del punto garantizará que exista una curvatura no nula para el espacio-tiempo que representa, sin embargo esto no es cierto ya que la propia métrica de Minkowski puede expresarse, en coordenadas esféricas por ejemplo, de modo que sus coeficientes sean funciones de las variables espaciales no dejando de ser por ello una métrica plana. Para hilar incluso más fino quizá alguien haya oido hablar algo de las ecuaciones de Einstein en Relatividad General: resulta que si una métrica es plana, entonces el tensor de campo es nulo y resulta que el espacio de Minkowksi es un espacio vacío de materia, razón por la cual puede suponerse que este tipo de espacio-tiempo resulta una buena aproximación cuando se traten regiones del espacio sin contenido material apreciable.

Puede demostrarse que la trayectoria espacio-temporal de la partícula es una hipérbola.

### 1.3.9. ¿Qué es el cuadrimomento para una partícula libre?

Para una partícula libre de masa $m$ el cuadrimomento es una generalización del trimomento usual de la mecánica en la forma

$$p^\mu = mu^\mu.$$

Evidentemente, para un sistema inercial cualquiera y una partícula libre moviéndose con velocidad $\vec{v}$ respecto a aquél

$$p^\mu = \gamma m(c, \vec{v})$$

y, en el sistema de referencia propio,

$$p_P^\mu = m(c, \vec{0}).$$

Para un sistema de partículas puede definirse el cuadrimomento total como

$$P^\mu = \sum_{n=1}^{N} p_n^\mu.$$

### 1.3.10. Energía y masa. ¿Cambia la masa de un cuerpo dependiendo de su estado de movimiento?

La energía relativista está muy relacionada con la componente temporal de cuadrimomento. En efecto, puede demostrarse que ésta se conserva si el sistema es invariante ante traslaciones temporales. Por definición, entonces, la cantidad conservada asociada a esta invariancia es la energía total del sistema

$$E = cP^0. \tag{4}$$

Además

$$-P^\mu P_\mu \equiv m^2 c^2 \tag{5}$$

como puede desprenderse del hecho de que la contracción sea un invariante tensorial y puede ser evaluado en el sistema de referencia donde más cómodo resulte, por ejemplo, en el sistema de centro de inercia, donde el trimomento total se anula (véase, por tomar un libro breve y conciso, [2]) y queda solo componente 0 del cuadrimomento[3].

Nótese que hemos efectuado una definición a la hora de enunciar el anterior resultado: definimos la masa de un sistema como el valor más bajo que puede tomar la energía en él.

[3] Un tratamiento más refinado a la hora de concluir este resultado exige un conocimiento

En efecto, en cualquier otro sistema de referencia, y a la vista de (4) y de (5), se tiene

$$E^2/c^2 - P^i P_i \equiv m^2c^2 \longrightarrow E^2 = c^2\vec{P}^2 + m^2c^4 \geq m^2c^4.$$

Obsérvese, además, que esta masa contiene contribuciones no solo de las partículas individuales sino también de las energías internas (de atracción o respulsión entre ellas) y de las energías cinéticas en el centro de inercia.

Esta definición puede resultar extraña a primera vista, sin embargo, en numerosas ramas de la física hay que optar por obrar de este modo ya que, parafraseando de mal modo a Ortega y Gasset, un cuerpo es un cuerpo y sus circunstancias: muchas veces no tiene sentido hablar de masas desnudas porque nunca veremos a los cuerpos fuera de las interacciones a las que están sometidos (la renormalización electrodinámica de la masa es un ejemplo altamente claro de ésto).

- Según lo anterior la masa de una partícula o de un sistema no cambia con la velocidad. En algunos textos (por ejemplo, en [2]) se hace referencia a los conceptos de masa relativista y masa en reposo, y se afirma que la masa de un cuerpo aumenta conforme su velocidad crece, sin embargo es más adecuado introducir una nueva definición de masa con carácter invariante. Una de las razones que se suele argüir para defender esta postura es la de no entrar en confusiones a la hora de entender los intersticios de este aparente aumento de masa: no se trata, en ningún caso, de ningún tipo de transformación de las propiedades internas del cuerpo sino de un aumento debido a la propia geometría del espacio-tiempo.

- Nótese entonces que la energía total en el sistema de referencia propio para una sola partícula libre toma la popular forma

$$E = mc^2$$

mientras que para el sistema de referencia desde el que la particula se mueve con una velocidad $v$ determinada es

$$E = m\gamma c^2.$$

más avanzado de los entresijos de la teoría de grupos y, en especial, del grupo de Poincaré. En ciertos grupos puede encontrarse un número finito de operadores invariantes bajo la acción de todos y cada uno de los elementos de los mismos; estos operadores invariantes *o de Casimir* proporcionan ciertas cantidades invariantes, *o Casimires*, del sistema. Puede demostrarse que el operador $-P_\mu P^\mu$, donde $P_\mu = \partial_\mu$ es el operador momento(o generador de traslaciones infinitesimales), es un operador de Casimir del grupo de Poincaré cuyo espectro de autovalores (previa prescripción de ciertas condiciones de anulación en el infinito sobre los campos que definen el sistema) está compuesto por la cantidad invariante $m^2c^2$, siendo $m$ la masa en el mismo sentido en que la definimos arriba. Para una descripción más detallada son útiles las referencias [1, 5].

- La relación entre las energías medidas por uno u otro sistema de referencia inercial vendrá dada, como siempre, por una transformación de Lorentz (en este caso de la componente temporal)

$$cP^{0'} = \Lambda^0{}_\mu cP^\mu.$$

# Referencias


[1] Luis J.Garay ,“Notas de Electrodinámica Clásica“.

[2] I.E. Irodov, ”Leyes Fundamentales de mecánica“, Mir.

[3] A.P. French, ”Relatividad Especial”, Reverté.

[4] R.H. Wasserman. “Tensor and Manifolds“, Oxford Press.

[5] Sattinger, Weaver. ”Lie Groups and algebras with aplications to physics, geometry and mechanics“, Bangalore Press.

[6] Hammermesh. ”Group Theory”, Addison Wesley.