Polinomios ortogonales

Javier Tarrío

31 de diciembre de 2007

Vamos a estudiar algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales, que son un conjunto de polinomios de orden n (donde el índice n va de 0 a infinito) linealmente independientes entre si en una cierta región del espacio. Para encontrar estos polinomios se pueden usar muy diversas técnicas. La más habitual en estudios de la carrera de física es partir de unas ecuaciones diferenciales concretas (que aparecen en algunos problemas de física) y solucionarlas bien mediante series de Frobenius o con la ayuda de la función hipergeométrica.

Aquí emplearemos un camino diferente (y complementario a ese) más general que el anterior, ya que nos permite determinar los casos que usualmente se estudian a partir de EDs concretas a partir de características en cierto modo más universales. Llegado un punto lo que haremos será dejar este punto de vista para concretar a tres casos en particular, de donde obtendremos los polinomios de Hermite, Laguerre, Gegenbauer, Legendre y Chebyshev.

También se podría hacer un estudio totalmente general a partir de la fórmula de Rodrigues, que aquí no tenemos muy en cuenta, de modo que tendríamos todas las propiedades de los polinomios ortogonales que estudiamos sin especificar los grados de libertad en ningún momento, pero eso eliminaría un poco ese objetivo de complementariedad entre estas notas y la resolución del problema mediante series de Frobenius y la función hipergeométrica.

Hay una importante ausencia notas, los polinomios de Bessel, pues no entran dentro del tratamiento general que damos aquí.

ADVERTENCIA: Algunas de las funciones especiales dadas aquí no están normalizadas de la forma más usual, tal y como se explica en el texto. Conviene comprobar la normalización a la hora de comparar con otras fuentes.

Índice

1. Definiciones **2**

2. Operadores hermíticos **3**

3. Problema de Sturm-Liouville **3**

4. Polinomios ortogonales **5**

5. Problema de Sturm-Liouville y los polinomios ortogonales **6**

6. Polinomios representativos **7**

6.1. Polinomios de tipo Hermite . . . 8

6.1.1. Polinomios de Hermite probabilísticos . . . 9

6.1.2. Polinomios de Hermite físicos . . . 10

6.2. Polinomios de tipo Laguerre . . . 11

6.2.1. Polinomios de Laguerre generalizados . . . 12

6.3. Polinomios de tipo Gegenbauer . . . 13

6.3.1. Polinomios de Legendre . . . 15

6.3.2. Polinomios de Chebyshev de segunda clase . . . 16

6.3.3. Poliniomios de Chebyshev de primera clase . . . 16

1. Definiciones

Tecnicismo 1. Denotaremos mediante $M_n(\Omega, C)$ (o simplemente M_n por simplificar) lo siguiente

- Un conjunto de funciones (reales o complejas) de n variables reales.
- Estas funciones están bien definidas en una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Todas las funciones cumplen las mismas condiciones de contorno C.

Tecnicismo 2. Denotaremos al cuerpo en el que estamos trabajando como Λ; generalmente $\Lambda = \mathbb{R}$ o $\Lambda = \mathbb{C}$.

Tecnicismo 3. Durante estas notas emplearemos operadores lineales que denotaremos en general mediante $\hat{O}$.

Definición 4 (Autofunciones y autovalores de un operador)**.** Dado un M_n y el operador lineal $\hat{O} : M_n \mapsto M_n$, decimos que la función $f(\vec{x}) \in M_n$ es autofunción de $\hat{O}$ con autovalor $\lambda \in \Lambda$ si

$$\hat{O} f(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \tag{1}$$

El conjunto de autovalores de un operador es su *espectro*, y éste puede ser *discreto* si es numerable o, de lo contrario, *continuo*.

Definición 5 (Producto escalar pesado)**.** Sean las funciones $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in M_n$ y sea $w(\vec{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$ la denominada función peso, entonces definimos el producto escalar pesado por $w(\vec{x})$ de $f(\vec{x})$ por $g(\vec{x})$ (y lo denotamos $\langle f, g \rangle_w$) al número

$$\langle f, g \rangle_w = \int_\Omega \mathrm{d}^n x \, w(\vec{x}) \, f^*(\vec{x}) \, g(\vec{x}) \tag{2}$$

Con esta definición se satisfacen las propiedades siguientes

1. $$\langle f, f \rangle_w \geq 0 \text{ y } \langle f, f \rangle_w = 0 \Leftrightarrow f(\vec{x}) = 0 \tag{3}$$

2. $$\langle f, \lambda g + \mu h \rangle_w = \lambda \langle f, g \rangle_w + \mu \langle f, h \rangle_w \tag{4}$$

3. $$\langle f, g \rangle_w = \langle g, f \rangle_w^* \tag{5}$$

Observación 6. De las propiedades anteriores se obtiene

$$\langle \lambda f, g \rangle_w = \langle g, \lambda f \rangle_w^* = \lambda^* \langle g, f \rangle_w^* = \lambda^* \langle f, g \rangle_w \tag{6}$$

Definición 7 (Ortogonalidad)**.** Dadas dos funciones $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in M_n$ decimos que son ortogonales si se cumple

$$\langle f, g \rangle_w = 0 \tag{7}$$

Definición 8 (Norma)**.** Sea $f(\vec{x}) \in M_n$, definimos la norma de $f(\vec{x})$ (y la denotamos como $||f||_w$) al número

$$||f||_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w} \tag{8}$$

Con esta definición se satisfacen las propiedades siguientes

1. $$||f||_w \geq 0 \text{ y } ||f||_w = 0 \Leftrightarrow f(\vec{x}) = 0 \tag{9}$$

2. $$||\lambda f||_w = |\lambda| \, ||f||_w \tag{10}$$

3.
$$||f-g||_w = ||g-f||_w \tag{11}$$

4.
$$||f+g||_w \leq ||f||_w + ||g||_w \tag{12}$$

Definición 9 (Función normalizada)**.** Sea $f(\vec{x}) \in M_n$ y su norma $||f||_w \in \mathbb{R}$, definimos la función normalizada $f_N(\vec{x})$ a la función de norma unidad

$$f_N(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{||f||_w} \tag{13}$$

2. Operadores hermíticos

Definición 10 (Operador hermítico)**.** Un operador $\hat{O} : M_n \mapsto M_n$ se dice hermítico si cumple

$$\left\langle f, \hat{O}g \right\rangle_w = \left\langle \hat{O}f, g \right\rangle_w \tag{14}$$

Observación 11. La hermiticidad de un operador es una propiedad conjunta del operador $\hat{O}$ y el conjunto de las funciones M_n sobre las que actúa.

Teorema 12. *Los autovalores de un operador hermítico son reales.*

Demostración: Los autovalores son $\hat{O}f(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$, $(f(\vec{x}) \neq 0)$ entonces tenemos

$$\left\langle f, \hat{O}f \right\rangle_w = \langle f, \lambda f \rangle_w = \lambda ||f||_w \tag{15}$$

por otro lado, como es hermítico

$$\left\langle f, \hat{O}f \right\rangle_w = \left\langle \hat{O}f, f \right\rangle_w = \langle \lambda f, f \rangle_w = \lambda^* ||f||_w \tag{16}$$

de donde
$$\lambda = \lambda^* \tag{17}$$

Teorema 13. *Sea $\hat{O}$ hermítico y $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in M_n$ dos autofunciones de autovalor ϕ y γ respectivamente, entonces si $\phi \neq \gamma \Rightarrow \langle f, g \rangle_w = 0$*

Demostración: Por ser el operador hermítico

$$\begin{aligned} \left\langle f, \hat{O}g \right\rangle_w &= \left\langle \hat{O}f, g \right\rangle_w \\ \gamma \langle f, g \rangle_w &= \phi \langle f, g \rangle_w \\ (\gamma - \phi) \langle f, g \rangle_w &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

entonces si $\gamma \neq \phi$ tenemos $\langle f, g \rangle_w = 0$.

3. Problema de Sturm-Liouville

Definición 14 (Operador de Sturm-Liouville)**.** Llamamos operador de Sturm-Liouville (y lo denotamos $\hat{L}$) al operador que actúa sobre la función real $f(x) \in M_1$, siendo $\Omega = (a, b)$, según

$$\hat{L}f(x) = \frac{1}{\omega(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(R(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right) \tag{19}$$

donde $\omega(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$ y $R(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$.

Observación 15. El operador de Sturm-Liouville es lineal.

Teorema 16 (Hermiticidad de $\hat{L}$)**.** *El operador de Sturm-Liouville es hermítico si $\omega(x)$ es el peso $w(x)$ del producto escalar y $R(a) = R(b)$, siendo $a, b = \partial\Omega$.*

Demostración: Denotando $' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle f, \hat{L}g \right\rangle_w &= \int_\Omega \mathrm{d}x \frac{w(x)}{\omega(x)} f(x) \left(R(x) g'(x)\right)' \\ \left\langle \hat{L}f, g \right\rangle_w &= \int_\Omega \mathrm{d}x \frac{w(x)}{\omega(x)} \left(R(x) f'(x)\right)' g(x)\end{aligned}$$

entonces, restando ambas e integrando por partes tenemos

$$\left\langle f, \hat{L}g \right\rangle_w - \left\langle \hat{L}f, g \right\rangle_w = \int_\Omega \mathrm{d}x \frac{w(x)}{\omega(x)} \left[R(x) \left(f(x)g'(x) - g(x)f'(x)\right)\right]' \tag{20}$$

ahora, si $\omega(x) = w(x)$ entonces la integral es trivial

$$\left\langle f, \hat{L}g \right\rangle_w - \left\langle \hat{L}f, g \right\rangle_w = R(x) \left(f(x)g'(x) - g(x)f'(x)\right) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{21}$$

si se cumplen las condiciones del teorema. De ahora en adelante trabajaremos con un operador $\hat{L}$ hermítico, es decir, supondremos que se cumplen las condiciones de este teorema.

Observación 17. Existen distintas formas de escribir el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} f_n''(x) + \tfrac{L(x)}{Q(x)} f_n'(x) + \tfrac{\lambda_n}{Q(x)} f_n(x) &= 0 \\ Q(x) f_n''(x) + L(x) f_n'(x) + \lambda_n f_n(x) &= 0 \\ \left(R(x) f_n'(x)\right)' + \lambda_n w(x) f_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

que se relacionan entre si mediante las igualdades $R(x) = \exp\left(\int \frac{L(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x\right)$ y $w(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Por tanto tenemos

$$\hat{L} f_n(x) = -\lambda_n f_n(x) \tag{22}$$

donde las distintas autofuciones $f_n(x)$ asociadas a los distintos autovalores reales λ_n son ortogonales entre sí con peso $w(x) = \omega(x)$, es decir

$$\langle f_m, f_n \rangle_w = \delta_{mn} \left(||f_m||_w\right)^2 \equiv \delta_{mn}\, h_m \tag{23}$$

Teorema 18 (Separación de Sturm (I))**.** *Si $f(x), g(x) \in M_1$ son dos autofunciones distintas de $\hat{L}$ entonces los ceros de estas funciones son distintos.*

Demostración: Como $f(x)$ y $g(s)$ son dos soluciones distintas de la misma ecuación diferencial su wronskiano es no nulo en todo el intervalo Ω, entonces

$$W(f(x), g(x)) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega \tag{24}$$

Si $f(x_0) = 0$ con $x_0 \in \Omega$ entonces $W(x_0) = -f'(x_0)g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x_0) \neq 0$

Lema 19. Para dos soluciones independientes de una ED el wronskiano no cambia de signo, puesto que $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$

Teorema 20 (Separación de Sturm (II))**.** *Si $f(x), g(x) \in M_1$ son dos autofunciones distintas de $\hat{L}$ entonces los ceros de estas funciones se alternan (entre dos ceros consecutivos de una de ellas hay un cero de la otra).*

Demostración: Sean x_1 y x_2 dos ceros consecutivos de $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} W(x_1) &= -f'(x_1)g(x_1) \neq 0 \\ W(x_2) &= -f'(x_2)g(x_2) \neq 0 \end{aligned}$$

de donde se tiene que x_1 y x_2 no son ni máximos ni mínimos de $f(x)$ con lo que

$$\text{Signo}(f'(x_1)) = -\text{Signo}(f'(x_2)) \tag{25}$$

por continuidad. Por el lema anterior $\text{Signo}(W(x_1)) = \text{Signo}(W(x_2))$ y de aquí se obtiene que

$$\text{Signo}(g(x_1)) = -\text{Signo}(g(x_2)), \tag{26}$$

que según el teorema de bolzano implica que existe un cero de $g(x)$ en el intervalo (x_1, x_2). Análogamente se obtiene la misma condición para los ceros de $f(x)$ respecto a los de $g(x)$.

Teorema 21. *Sea $f(x) \in M_1$ una autofunción del operador $\hat{L}$, entonces $f(x)$ tiene un número finito de ceros.*

4. Polinomios ortogonales

Antes de estudiar la forma de las soluciones al problema de autovalores y autofunciones expondremos algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales.

Denotaremos a partir de ahora a los polinomios ortogonales como $\phi_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} x^i$ y consideramos que no están normalizados, es decir

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_w = \delta_{mn}\, h_m \tag{27}$$

Lema 22. Un polinomio cualquiera $P(x)$ de orden n se puede escribir como combinación lineal de polinomios ortogonales con orden menor o igual a n, es decir

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \phi_i(x) \tag{28}$$

con $\alpha_i \in \Lambda$.

Lema 23. Un polinomio de orden n es ortogonal a cualquier polinomio de orden menor.

Teorema 24. *Las n raíces de ϕ_n son reales.*

Demostración: Sean $x_j, j = 1, \cdots, m$ con $m \leq n$ los puntos donde $\phi_n(x_j) = 0$. Consideremos un polinomio de orden m que tiene las mismas raíces

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} (x - x_i) \tag{29}$$

entonces el producto $P(x)\phi_n(x)$ (y por lo tanto $w(x)P(x)\phi_n(x)$ ya que w(x) es positiva) tiene el mismo signo en todo el dominio Ω, esto quiere decir que $\langle P, \phi_n \rangle_w \neq 0$, y la única posibilidad es que $m = n$ (todas las raíces son reales), pues si $m < n$ los polinomios deben ser ortogonales.

Teorema 25 (Relación de recurrencia)**.** *Los polinomios ortogonales de orden $n+1$, n y $n-1$ cumplen la siguiente relación de recurrencia*

$$\phi_{n+1} - (a_n x + b_n)\phi_n - c_{n-1}\phi_{n-1} = 0 \tag{30}$$

donde $a_n = \frac{\alpha_{n+1}^{(n+1)}}{\alpha_n^{(n)}}$ y $b_n = \left(\frac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_n^{(n)}} - a_n \frac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}} \right)$.

Demostración: $x\phi_n$ es un polinomio de orden $n+1$, con lo que

$$\phi_{n+1} - a_n x \phi_n = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i^{(n+1)} x^i - a_n \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} x^{i+1} = \alpha_0^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i^{(n+1)} - a_n \alpha_{i-1}^{(n)}) x^i \tag{31}$$

si $a_n = \frac{\alpha_{n+1}^{(n+1)}}{\alpha_n^{(n)}}$ entonces la serie anterior se trunca a orden n.

Ahora podemos reducir otro orden más el polinomio anterior siguiendo un procedimiento similar

$$\phi_{n+1}-a_nx\phi_n-b_n\phi_n = \alpha_0^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(n+1)}-a_n\alpha_{i-1}^{(n)})x^i-b_n\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^{(n)}x^i = (\alpha_0^{(n+1)}-b_n\alpha_0^{(n)})+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(n+1)}-a_n\alpha_{i-1}^{(n)}-b_n\alpha_i^{(n)})x^i \tag{32}$$

de modo que obtenemos un polinomio de orden $n-1$ si $b_n = \left(\frac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_n^{(n)}} - a_n\frac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}}\right)$

Este polinomio lo podemos expandir en virtud del lema anterior como $\phi_{n+1}-(a_nx+b_n)\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{c_i}{h_i}\phi_i$. Si ahora hacemos el producto escalar con ϕ_j con $j \le n-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle\phi_{n+1},\phi_j\rangle_w - \langle(a_nx+b_n)\phi_n,\phi_j\rangle_w &= a_n\langle x\phi_n,\phi_j\rangle_w \\
\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c_i}{h_i}\langle\phi_i,\phi_j\rangle_w &= c_j \\
a_n\langle x\phi_n,\phi_j\rangle_w &= c_j
\end{aligned} \tag{33}$$

si $j<n-1$ entonces los dos polinomios a la izquierda son de distinto orden y tenemos que $c_j=0$; la otra posibilidad es simplemente $j=n-1$, con lo cual se demuestra el teorema.

Lema 26.

$$\begin{aligned}
\langle\phi_n,x\phi_n\rangle_w &= h_n\left(\frac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}}-\frac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_{n+1}^{(n+1)}}\right) \\
\langle\phi_n,x\phi_{n-1}\rangle_w &= h_n\frac{\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{\alpha_n^{(n)}}
\end{aligned}$$

Teorema 27. *El tercer término de la relación de recurrencia vale* $c_{n-1} = -\frac{h_n}{h_{n-1}}\frac{\alpha_{n+1}^{(n+1)}\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{(\alpha_n^{(n)})^2}$

Demostración: Tomando el producto escalar con el polinomio ϕ_{n-1} obtenemos

$$-a_n\langle\phi_{n-1},x\phi_n\rangle_w - c_{n-1}h_{n-1} = 0 \Rightarrow c_{n-1} = -\frac{a_n}{h_{n-1}}\langle\phi_n,x\phi_{n-1}\rangle_w \tag{34}$$

y en virtud del anterior lema queda demostrado.

5. Problema de Sturm-Liouville y los polinomios ortogonales

Partiendo de la forma

$$Q(x)\phi_n''(x)+L(x)\phi_n'(x)+\lambda_n\phi_n(x)=0 \tag{35}$$

para el problema de Sturm-Liouville se puede demostrar que existe un conjunto de soluciones $\phi_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$ tal que cada función $\phi_n(x)$ es un polinomio de orden n. Esto se cumple (a grandes rasgos) si Q(x) es como mucho un polinomio cuadrático y $L(x)$ una función lineal (obsérvese que en ese caso cada término de la ecuación es un polinomio y el grado de éstos es consistente). De este modo tenemos

$$(q_0+q_1x+q_2x^2)\phi_n''(x)+(l_0+l_1x)\phi_n'(x)+\lambda_n\phi_n(x)=0 \tag{36}$$

De la expresión polinomial de $\phi_n(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \sum_{j=0}^{n}\alpha_j^{(n)}x^j \\
\phi_n'(x) &= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\alpha_{j+1}^{(n)}x^j \\
\phi_n''(x) &= \sum_{j=0}^{n-2}(j+1)(j+2)\alpha_{j+2}^{(n)}x^j
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(q_0 + q_1 x + q_2 x^2) \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(j+2)\alpha_{j+2}^{(n)} x^j + (l_0 + l_1 x) \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\alpha_{j+1}^{(n)} x^j + \lambda_n \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(n)} x^j = 0 \quad (37)$$

Teorema 28 (Autovalores)**.** *Los autovalores del problema de Sturm-Liouville valen*

$$\lambda_n = n\left[(1-n)q_2 - l_1\right] \quad (38)$$

Teorema 29. *$\alpha_{n-1}^{(n)}$ y $\alpha_n^{(n)}$ están relacionados mediante*

$$\alpha_{n-1}^{(n)} = \frac{n\left[(1-n)q_1 - l_0\right]}{2(1-n)q_2 - l_1} \alpha_n^{(n)} \quad (39)$$

Teorema 30 (Determinación coeficientes $\alpha^{(n)}$)**.** *Dados $Q(x)$ y $L(x)$ y conocido el término principal $\alpha_n^{(n)}$ (y según el teorema anterior también $\alpha_{n-1}^{(n)}$) se pueden determinar todos los $\alpha_j^{(n)}$ con $j \leq n-2$ mediante*

$$\alpha_j^{(n)} = -\frac{(j+1)\left[jq_1 + l_0\right]\alpha_{j+1}^{(n)} + q_0(j+1)(j+2)\alpha_{j+2}^{(n)}}{j\left[(j-1)q_2 + l_1\right] + \lambda_n} \quad (40)$$

Observación 31. Si $Q(x)$ no es cuadrático entonces el espectro es lineal en n.

Observación 32. Para evitar un espectro degenerado $L(x)$ ha de ser lineal necesariamente.

Observación 33. Si $q_1 = l_0 = 0$ entonces el polinomio ϕ_n está formado por potencias pares (impares) de x si n es par (impar) y además $b_n = 0$ en la relación de recurrencia.

Teorema 34 (Fórmula de Rodrigues)**.** *El polinomio ortogonal de grado n solución del problema de Sturm-Liouville viene determinado (salvo una constante) por la fórmula*

$$\phi_n = \frac{k_n}{w(x)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(w(x)[Q(x)]^n\right) \quad (41)$$

Observación 35. Las propiedades de los polinomios ortogonales, así como la ecuación diferencial que satisfacen y la relación de recurrencia, se pueden derivar de la fórmula de Rodrigues.

Observación 36. Las constantes k_n (de la fórmula de Rodrigues), h_n (de la norma al cuadrado) y $\alpha_n^{(n)}$ (del término dominante en el polinomio) están relacionadas entre sí, de modo que sólo una es independiente.

Definición 37. Llamamos función generatriz $g(t,x)$ a aquella que se obtiene al utilizar los polinomios ortogonales como coeficientes de la expansión de taylor, es decir

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{n!} t^n \quad (42)$$

Observación 38. Algunos autores introducen el término $1/n!$ dentro de la definición del polinomio ortogonal (a través de $\alpha_n^{(n)}$) y por lo tanto en estos casos la función generatriz se define como

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) t^n \quad (43)$$

6. Polinomios representativos

Hemos visto que para evitar la degeneración de los autovalores es necesario que la función $L(x)$ sea lineal, sin embargo no hemos encontrado ninguna ligadura para $Q(x)$ más allá de que sea, a lo sumo, cuadrática. Dependiendo de si esta función es efectivamente cuadrática, lineal o simplemente una constante tendremos tres tipos de polinomios distintos, con sus características peculiares.

Aquí desarrollaremos los polinomios de tipo Hermite, Laguerre y Gegenbauer a partir de la exposición general dada hasta ahora, excepto para dar la fórmula de Rodrigues y la función generatriz, en donde haremos cada caso por separado (y de paso nos curamos de espanto por no dar las demostraciones oportunas para estas dos ecuaciones).

6.1. Polinomios de tipo Hermite

En la presente sección estudiaremos el caso más sencillo en que

$$Q(x) = q_0 \tag{44}$$

que son los llamados *polinomios de tipo Hermite*[1].

Como $Q(x) = q_0$ y $L(x) = l_0 + l_1 x$ tenemos que

$$R(x) = Ae^{\frac{1}{q_0}(l_0 + \frac{l_1}{2}x)x} \qquad w(x) = \frac{A}{q_0} e^{\frac{1}{q_0}(l_0 + \frac{l_1}{2}x)x} \tag{45}$$

donde $A > 0$ es una constante de integración que fijamos a 1 por comodidad. Vemos pues que la función peso está definida positiva para todo el intervalo $-\infty < x < \infty$, que será el intervalo en el que los polinomios tipo Hermite estarán bien definidos.

Con este intervalo de validez (y dado que $l_1 \neq 0$) podemos hacer una traslación y una dilatación $x \to q_0^{\frac{1}{2}}(x - \frac{l_0}{l_1})$ de modo que tenemos que la ecuación tipo Hermite toma la forma

$$H_n''(x) + l_1\, x\, H_n'(x) + \lambda_n\, H_n(x) = 0 \tag{46}$$

que es la forma general para la ecuación de este tipo de polinomios[2]. De este modo $w(x) = e^{\frac{l_1}{2}x^2}$ y tenemos que exigir que $l_1 < 0$ para que el producto escalar dé un valor finito.

Además se tiene que $R(-\infty) = R(\infty)$ con lo que se cumplen las condiciones para que los polinomios $H_n(x)$ sean ortogonales con autovalor real, siendo este autovalor

$$\lambda_n = -l_1 n \geq 0. \tag{47}$$

Una vez vistas estas características pasamos a calcular el término $\alpha_j^{(n)}$ general del polinomio $H_n(x)$ para lo cual nos ayudamos de la relación

$$\alpha_{j<n}^{(n)} = -\frac{(j+1)(j+2)}{(j-n)l_1}\alpha_{j+2}^{(n)} \tag{48}$$

Por conveniencia definimos el término principal del polinomio como $\alpha_n^{(n)} \equiv c^n$; mediante inducción se puede probar que en general, el término $(n-2k)$-ésimo vale

$$\alpha_{n-2k}^{(n)} = \left(\frac{1}{2l_1}\right)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!}c^n \tag{49}$$

de donde

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p^{(n)} x^p = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\frac{c^2}{2l_1}\right)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!}(cx)^{n-2k}. \tag{50}$$

Con esta última ecuación se puede obtener la *función generatriz* de los polinomios, en el que usaremos el siguiente

Lema 39.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[n/2]} a_k b_{n-2k}\right] t^n \tag{51}$$

y así tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[n/2]}\left(\frac{c^2}{2l_1}\right)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!}(cx)^{n-2k}\right]\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(ct)^2}{2l_1}\right)^k \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(cxt)^n}{n!}\right) \\
&= \exp\left(cxt + \frac{c^2t^2}{2l_1}\right)
\end{aligned} \tag{52}$$

[1] del que los *polinomios de Hermite* son un caso particular, no hay que confundirlos.

[2] nótese que hemos redefinido l_1 para absorber otras constantes

Con este resultado podemos obtener la *fórmula de Rodrigues*, que es una fórmula que nos permite obtener el polinomio tipo Hermite de grado n sin más que derivar n veces. Como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ \text{ y } \ e^{cxt + \frac{c^2 t^2}{2 l_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{53}$$

entonces

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{cxt + \frac{c^2 t^2}{2 l_1}} \right|_{t=0} = e^{-\frac{l_1 x^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{\frac{c^2}{2 l_1} \left(\frac{l_1 x}{c} + t \right)^2} \Bigg|_{t=0} \\ &= e^{-\frac{l_1 x^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{\frac{c^2}{2 l_1} z^2} \Bigg|_{z = \frac{l_1 x}{c}} = \left(\frac{c}{l_1} \right)^n e^{-\frac{l_1 x^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\frac{l_1 x^2}{2}}. \end{aligned} \tag{54}$$

Como se cumplen las condiciones del teorema para que el operador de Sturm-Liouville sea hermítico, sabemos que los polinomios de distinto grado son ortogonales entre si. La *norma cuadrada* (h_n) se puede calcular fácilmente a partir de la fórmula de Rodrigues

$$h_n = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 w(x) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{c}{l_1} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\frac{l_1 x^2}{2}} \tag{55}$$

que al integrar por partes n veces (diferenciando el polinomio tipo Hermite e integrando la exponencial, que se anula en los límites) obtenemos

$$h_n = \left(-\frac{c}{l_1} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x) e^{\frac{l_1 x^2}{2}} \tag{56}$$

como la única potencia n-ésima del polinomio es $\alpha_n^{(n)} = c^n$ tenemos que $H_n^{(n)}(x) = c^n n!$ y nos queda una integral sencilla de una gaussiana, quedando la norma como

$$h_n = \left(-\frac{c^2}{l_1} \right)^n n! \sqrt{-\frac{2\pi}{l_1}}. \tag{57}$$

Con todo lo expuesto hasta ahora se tiene que la relación de recurrencia es

$$H_{n+1}(x) - cx H_n(x) - \frac{c^2}{l_1} n H_{n-1}(x) = 0 \tag{58}$$

6.1.1. Polinomios de Hermite probabilísticos

Eligiendo el valor del término principal del polinomio tipo Hermite c y la constante de la ecuación diferencial l_1 determinamos totalmente las propiedades de los polinomios solución. En la teoría de la probabilidad se le suelen asignar los valores

$$c = 1 \qquad\qquad l_1 = -1$$

de modo que tenemos:

- **Ecuación diferencial**

$$H_n''(x) - \, x \, H_n'(x) + \lambda_n \, H_n(x) = 0 \tag{59}$$

- **Función peso**

$$w(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \tag{60}$$

- **Autovalores**

$$\lambda_n = n \tag{61}$$

- **Función generatriz**

$$e^{xt-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{62}$$

- **Fórmula de Rodrigues**

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{63}$$

- **Ortogonalidad**

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = n! \sqrt{2\pi} \delta_{mn} \tag{64}$$

- **Relación de recurrencia**

$$H_{n+1}(x) - x H_n(x) + n H_{n-1}(x) = 0 \tag{65}$$

6.1.2. Polinomios de Hermite físicos

En física se toman unos valores distintos para los dos parámetros que tenemos libres

$$c = 2 \qquad\qquad l_1 = -2$$

lo cual hace que ahora tengamos:

- **Ecuación diferencial**

$$H_n''(x) - 2x \, H_n'(x) + \lambda_n \, H_n(x) = 0 \tag{66}$$

- **Función peso**

$$w(x) = e^{-x^2} \tag{67}$$

- **Autovalores**

$$\lambda_n = 2n \tag{68}$$

- **Función generatriz**

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{69}$$

- **Fórmula de Rodrigues**

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \tag{70}$$

- **Ortogonalidad**

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \tag{71}$$

- **Relación de recurrencia**

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0 \tag{72}$$

6.2. Polinomios de tipo Laguerre

El siguiente caso a estudiar es aquel en el que

$$Q(x) = q_0 + q_1 x \tag{73}$$

que son los llamados *polinomios de tipo Laguerre*. Igual que para los polinomios de Hermite hicimos una traslación y una dilatación de la coordenada x para determinar los valores de q_0 y l_0, ahora las haremos para determinar q_0 y q_1. La transformación a realizar es $x \to q_1(x - \frac{q_0}{q_1^2})$, con lo que finalmente obtenemos $Q(x) = x$ y por lo tanto vemos que el dominio de los polinomios tipo Laguerre va a ser $x \in [0, \infty)$, donde

$$R(x) = Ax^{l_0} e^{l_1 x} \qquad\qquad w(x) = Ax^{l_0 - 1} e^{l_1 x}. \tag{74}$$

Al igual que antes, ponemos $A = 1$ por conveniencia. De nuevo vemos que necesariamente $l_1 < 0$ y $l_0 > 1$ para que la norma de los polinomios esté bien definida. La ecuación en su forma más general para los polinomios de tipo Laguerre queda pues como

$$x\, L_n''(x) + (l_0 + l_1\, x) L_n'(x) + \lambda_n\, L_n(x) = 0. \tag{75}$$

Antes de seguir conviene clarificar algo sobre la notación: generalmente se escribe $l_0 = \alpha + 1$ y se etiqueta a los polinomios de Laguerre como $L_n^{(\alpha)}$, quedando la notación sin superíndice reservada para el caso $\alpha = 0$. En estas notas no se escribirá este superíndice, pero sí que se empleará la constante $\alpha = l_0 - 1 \geq 0$ ya que la combinación $l_0 - 1$ aparece continuamente.

Se puede ver que $R(0) = R(\infty)$ con lo que se cumplen las condiciones para que los polinomios $L_n(x)$ sean ortogonales con autovalor real, siendo este autovalor

$$\lambda_n = -l_1 n \geq 0. \tag{76}$$

Ahora los $\alpha_j^{(n)}$ sólo dependen del término $j+1$ y, mediante inducción, se llega fácilmente a que en general se tiene

$$\alpha_k^{(n)} = \binom{n+\alpha}{k+\alpha} \frac{\alpha_n^{(n)}}{k!} \frac{n!}{l_1^{n-k}} \tag{77}$$

y por lo tanto, eligiendo[3] $\alpha_n^{(n)} = c^n$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^n = \left(\frac{c}{l_1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k+\alpha} \frac{n!}{k!} (l_1 x)^k \tag{78}$$

Para encontrar la *función generatriz* vamos a ayudarnos de

Lema 40. Algunas propiedades del binomio

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad\qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ o } k > n \tag{79}$$

y también de

Lema 41.

$$\frac{1}{(1-z)^{p+\alpha+1}} = \sum_{q=0}^{\infty} \binom{q+p+\alpha}{q} z^q \tag{80}$$

[3]es bastante común elegir $\alpha_n^{(n)} = \frac{c^n}{n!}$ para anular el factorial que aparece en la fórmula anterior, en ese caso no debe aparecer a la hora de definir el desarrollo de la función generatriz.

De modo que tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{(l_1x)^k}{k!}\right]\left(\frac{ct}{l_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{(l_1x)^k}{k!}\left(\frac{ct}{l_1}\right)^n \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(l_1x)^p}{p!}\sum_{q=-p}^{\infty}\binom{q+p+\alpha}{p+\alpha}\left(\frac{ct}{l_1}\right)^{p+q} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(l_1x)^p}{p!}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q+p+\alpha}{q}\left(\frac{ct}{l_1}\right)^{p+q} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(cxt)^p}{p!}\frac{1}{(1-\frac{ct}{l_1})^{p+\alpha+1}} = \frac{1}{(1-\frac{ct}{l_1})^{\alpha+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{cxt}{1-\frac{ct}{l_1}}\right)^p\frac{1}{p!} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{cxt}{1-\frac{ct}{l_1}}\right)}{(1-\frac{ct}{l_1})^{\alpha+1}} \qquad (81)
\end{aligned}
$$

La *fórmula de Rodrigues* se puede obtener de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
L_n(x) &= \left(\frac{c}{l_1}\right)^n\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{(n-p)!p!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}(l_1x)^p = \left(\frac{c}{l_1}\right)^n x^{-\alpha}e^{-xl_1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}l_1^pe^{xl_1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}x^{p+\alpha} \\
&= \left(\frac{c}{l_1}\right)^n x^{-\alpha}e^{-xl_1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}e^{xl_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-p}}{\mathrm{d}x^{n-p}}x^{n+\alpha}\right) \\
&= \left(\frac{c}{l_1}\right)^n x^{-\alpha}e^{-xl_1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{xl_1}x^{n+\alpha}\right) \qquad (82)
\end{aligned}
$$

lo que nos permite, del mismo modo que en el caso de los polinomios de tipo Hermite, calcular la *norma cuadrada* de estos polinomios (de nuevo, como el operador de Sturm-Lioville es hermítico, tenemos que los polinomios de distinto orden son ortogonales entre si).

$$
h_n = \int_0^{\infty}L_n(x)^2w(x) = \left(-\frac{c}{l_1}\right)^n\int_0^{\infty}L_n^{(n)}(x)e^{l_1x}x^{n+\alpha} = \left(\frac{c}{l_1}\right)^{2n}n!\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(-l_1)^{\alpha+1}} \qquad (83)
$$

y por lo tanto la *relación de recurrencia* para este tipo de polinomios es

$$
L_{n+1}(x)-(l_1x+2n+\alpha+1)L_n(x)+\left(\frac{c}{l_1}\right)^2 n(n+\alpha)L_{n-1}(x)=0 \qquad (84)
$$

6.2.1. Polinomios de Laguerre generalizados

De nuevo llamamos la atención acerca de que la notación estándar para los polinomios de Laguerre generalizados es $L_n^{(\alpha)}(x)$ (con el caso $\alpha = 0$ siendo los *polinomios de Laguerre* a secas), y éstos se definen tomando

$$
l_0 = \alpha+1 \qquad\qquad c = l_1 = -1
$$

de modo que, en resumen:

- **Ecuación diferencial**

$$
L_n^{(\alpha)}{}''(x)-(\alpha+1-x)\,L_n^{(\alpha)}{}'(x)+\lambda_n\,L_n^{(\alpha)}(x)=0 \qquad (85)
$$

- **Función peso**

$$
w(x) = x^{\alpha}e^{-x} \qquad (86)
$$

- **Autovalores**

$$
\lambda_n = n \qquad (87)
$$

- **Función generatriz**
$$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n \tag{88}$$

- **Fórmula de Rodrigues**
$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right) \tag{89}$$

- **Ortogonalidad**
$$\int_{-\infty}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, \mathrm{d}x = n!\Gamma(n+\alpha+1)\delta_{mn} \tag{90}$$

- **Relación de recurrencia**
$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{91}$$

6.3. Polinomios de tipo Gegenbauer

Por último tenemos el caso en el que

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 \tag{92}$$

que son los llamados *polinomios de tipo Jacobi*. Como siempre, realizaremos una traslación y una dilatación de la coordenada x para fijar unívocamente $Q(x)$ y poder así determinar el intervalo de validez de estos polinomios. Haciendo pues esta transformación se puede expresar

$$Q(x) = q(1-x^2) \tag{93}$$

sin mayor dificultad, de modo que tenemos un intrervalo de validez para los polinomios de tipo Jacobi $x \in (-1,1)$, donde

$$R(x) = A\frac{(1+x)^{\frac{l_0-l_1}{2q}}}{(1-x)^{\frac{l_0+l_1}{2q}}} \qquad w(x) = A\frac{(1+x)^{\frac{l_0-l_1}{2q}-1}}{(1-x)^{\frac{l_0+l_1}{2q}+1}}. \tag{94}$$

Como siempre vamos a fijar $A = 1$y además haremos una redefinición de las constantes, escribiendo $l_0/q = \beta - \alpha$ y $l_1/q = -(\beta+\alpha+2)$ obtenemos

$$R(x) = (1+x)^{\beta+1}(1-x)^{\alpha+1} \qquad w(x) = (1+x)^\beta (1-x)^\alpha. \tag{95}$$

La ecuación en su forma más general para los polinomios de tipo Jacobi queda pues como

$$q(1-x^2)\, J_n''(x) + (\beta - \alpha - (\beta+\alpha+2)x)J_n'(x) + \lambda_n\, J_n(x) = 0. \tag{96}$$

Se puede ver que $R(-1) = R(1)$ con lo que se cumplen las condiciones para que los polinomios $J_n(x)$ sean ortogonales con autovalor real (siempre y cuando $\alpha, \beta > -1$), siendo los autovalores

$$\lambda_n = n\left(q(n-1) + \alpha + \beta + 2\right) \tag{97}$$

Cuando $q = 1$ los polinomios reciben el nombre de *polinomios de Jacobi* y se denotan como $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Nosotros no vamos a estudiar este tipo de polinomios ya que los desarrollos que aparecen son algo tediosos. Estudiaremos en cambio el caso concreto en que $\alpha = \beta \equiv \bar{\alpha} + \frac{1}{2}$, que son los denominados *polinomios de tipo Gegenbauer* ($C_n^{(\bar{\alpha})}(x)$); esto lo hacemos ya que todos los polinomios que vamos a nombrar son casos particulares de éste. Como en el caso de los polinomios tipo Laguerre, obviaremos el índice $\bar{\alpha}$ en la notación (y de hecho no volveremos a escribirlo barrado) durante toda la exposición. La ecuación diferencial para este tipo de polinomios es

$$(1-x^2)\, C_n''(x) - (2\alpha+1)x\, C_n'(x) + \lambda_n\, C_n(x) = 0. \tag{98}$$

con autovalores

$$\lambda_n = n\,(n+2\alpha)\,. \tag{99}$$

Usando la inducción se puede demostrar que el término que acompaña a la potencia $(n-2p)$-ésima vale

$$\begin{aligned}
\alpha^{(n)}_{n-2p} &= \frac{n!}{(n-2p)!}\prod_{k=1}^{p}\frac{\alpha^{(n)}_n}{(n-2k)(n-2k+2\alpha)-n(n+2\alpha)} \\
&= \frac{n!\,\alpha^{(n)}_n}{4^p p!(n-2p)!}\frac{\Gamma\,(1-n-\alpha)}{\Gamma\,(p+1-n-\alpha)}
\end{aligned} \tag{100}$$

de donde

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\alpha^{(n)}_k x^k = \sum_{p=0}^{[n/2]}\frac{n!\,\alpha^{(n)}_n}{4^p p!(n-2p)!}\frac{\Gamma\,(1-n-\alpha)}{\Gamma\,(p+1-n-\alpha)}x^{n-2p} \\
&= \alpha^{(n)}_n x^n\,F(\frac{1-n}{2},-\frac{n}{2};1-n-\alpha;\frac{1}{x^2})
\end{aligned} \tag{101}$$

donde hemos expresado el resultado por medio de la función hipergeométrica, aunque no usaremos este resultado de ahora en adelante ya que es más útil la expresión como serie. Escogeremos como la constante de normalización el valor[4] $\alpha^{(n)}_n = c^n\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$.

Para la *función generatriz* tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{p=0}^{[n/2]}\frac{n!\,c^n\,\Gamma\,(n+\alpha)}{2^{2p}p!(n-2p)!\,\Gamma\,(\alpha)}\frac{\Gamma\,(1-n-\alpha)}{\Gamma\,(p+1-n-\alpha)}x^{n-2p} \\
&= \sum_{n,p=0}^{\infty}(ct)^n\frac{\Gamma\,(n+\alpha)}{2^{2p}p!(n-2p)!\,\Gamma\,(\alpha)}\frac{\Gamma\,(1-n-\alpha)}{\Gamma\,(p+1-n-\alpha)}x^{n-2p} \\
&= \sum_{L,p=0}^{\infty}(ct)^{L+p}\frac{\Gamma\,(L+p+\alpha)}{2^{2p}p!(L-p)!\,\Gamma\,(\alpha)}\frac{\Gamma\,(1-L-p-\alpha)}{\Gamma\,(+1-L-\alpha)}x^{L-p} \\
&= \sum_{L=0}^{\infty}\left(\frac{ct}{2}\right)^L\frac{\Gamma\,(1-\alpha)}{\Gamma\,(1+L+\alpha)\,L!}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{L!}{p!(L-p)!}\left(\frac{ct}{2}\right)^p(-2x)^{L-p} \\
&\quad\times\left[\frac{\Gamma\,(\alpha+L+p)\,\Gamma\,(1-\alpha-L-p)}{\Gamma\,(1-\alpha)\,\Gamma\,(\alpha)}(-1)^{L-p}\right] \\
&= \sum_{L=0}^{\infty}\left(\frac{ct}{2}\right)^L\frac{\Gamma\,(1-\alpha)}{\Gamma\,(1+L+\alpha)\,L!}\left(\frac{ct}{2}-2x\right)^L(1)^{-\alpha-L} \\
&= \frac{1}{(1-cxt+\frac{c^2}{4}t^2)^\alpha}
\end{aligned} \tag{102}$$

en esta serie de igualdades hemos realizado los siguientes pasos: en la primera línea simplemente escribimos el polinomio de tipo Gegenbauer como una serie; en la segunda extendimos la suma en p hasta infinito, lo cual está permitido gracias a al factor $(n-2p)! = \Gamma(1+n-2p)$ en el denominador; en la tercera línea se realizó el cambio $n = L-p$ y en la cuarta se reordenaron las series, siendo el término entre corchetes igual a 1 debido a propiedades de las funciones gamma; en la penúltima línea resumamos la serie en p (que no es más que un binomio de Newton) y escribimos de forma explícita un factor 1 que nos hace ver claramente que nuestra serie final es otro binomio.

Ahora daremos la *fórmula de Rodrigues*; no la vamos a deducir porque es un cálculo aburrido y con expresiones largas que requieren ciertos toques de idea-feliz. Un buen ejercicio para el que tenga ganas es deducirla para un caso particular sencillo, como puede ser el caso $\alpha = 1/2$. La fórmula es

$$C_n(x) = \left(\frac{c}{2}\right)^n\frac{\Gamma\left(\alpha+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)\Gamma\left(\alpha+\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\,(\alpha)\,\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)}(x^2-1)^{1/2-\alpha}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^{n+\alpha-1/2} \tag{103}$$

[4] Nótese cómo esta definición sólo es válida para $\alpha \neq 0$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función suelo (el mayor entero menor o igual a x, es decir, equivalente a la parte entera $[x]$) y $\lceil x \rceil$ la función techo (el menor entero mayor o igual a x).

La norma cuadrada se calcula como hemos hecho para los polinomios de tipo Hermite y Laguerre

$$\begin{aligned} h_n &= \int_{-1}^{1} C_n(x)^2\, w(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{c^2}{2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\alpha + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) \Gamma\left(\alpha + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\gamma(\alpha)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n+\alpha-1/2} \\ &= \left(\frac{c^2}{2}\right)^n \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\alpha + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) \Gamma\left(\alpha + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \frac{1}{2}\right)}{(n+\alpha)\Gamma(\alpha)^2} \end{aligned} \tag{104}$$

Y la relación de recurrencia tiene los coeficientes

$$a_n = c(n+\alpha), \qquad b_n = 0, \qquad c_{n-1} = -\frac{h_n}{h_{n-1}} \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \tag{105}$$

con h_n dada en la expresión anterior.

6.3.1. Polinomios de Legendre

Tomando valores particulares de α tendremos distintos tipos de polinomios que aparecen de forma bastante común a la hora de resolver problemas físicos (el valor de c es sólo una cuestión de convenio). De este modo, tomando los valores

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad c = 2$$

definimos los polinomios de Legendre:

- **Ecuación diferencial**

$$(1-x^2)\, P_n''(x) - 2x\, P_n'(x) + \lambda_n\, P_n(x) = 0. \tag{106}$$

- **Función peso**

$$w(x) = 1 \tag{107}$$

- **Autovalores**

$$\lambda_n = n(n+1) \tag{108}$$

- **Función generatriz**

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n \tag{109}$$

- **Fórmula de Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2-1)^n \tag{110}$$

- **Ortogonalidad**

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha)}(x) P_n^{(\alpha)}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2\,n!}{2n+1} \delta_{mn} \tag{111}$$

- **Relación de recurrencia**

$$P_{n+1}(x) - (2n+1)x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) = 0 \tag{112}$$

6.3.2. Polinomios de Chebyshev de segunda clase

Si ahora cambiamos el valor de α

$$\alpha = 1 \qquad\qquad c = 2$$

nos encontramos con los polinomios de Chebyshev de segunda clase:

- **Ecuación diferencial**

$$(1-x^2)\,U_n''(x) - 3x\,U_n'(x) + \lambda_n\,U_n(x) = 0. \tag{113}$$

- **Función peso**

$$w(x) = (1-x^2)^{1/2} \tag{114}$$

- **Autovalores**

$$\lambda_n = n(n+2) \tag{115}$$

- **Función generatriz**

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x)}{n!} t^n \tag{116}$$

- **Fórmula de Rodrigues**

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (1-x^2)^{n+1/2} \tag{117}$$

- **Ortogonalidad**

$$\int_{-1}^{1} U_m^{(\alpha)}(x) U_n^{(\alpha)}(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} n! \delta_{mn} \tag{118}$$

- **Relación de recurrencia**

$$U_{n+1}(x) - 2(n+1)x\,U_n(x) - (n+1)U_{n-1}(x) = 0 \tag{119}$$

6.3.3. Poliniomios de Chebyshev de primera clase

En este caso tendríamos que escoger el valor $\alpha = 0$, pero como se dijo más arriba, nuestra discusión no era válida para este valor porque hemos definido $\alpha_n^{(n)} \propto \Gamma(\alpha)^{-1}$. Queda como ejercicio escoger un valor adecuado para $\alpha_n^{(n)}$ y desarrollar los cálculos pertinentes.