Transformadas integrales

pod

Marzo - abril de 2001

Introducción

Este documento presenta brevemente los principios de la *teoría de las transformadas integrales*, en especial, de la *transformada de Laplace* y la de *Fourier*. La transformación de Laplace es de amplia aplicación en el campo de la electrónica y l teoría de circuitos. Por otra parte, la transformada de Fourier, es de amplia aplicación en el análisis de señales, así como en diferentes campos de la física (teoría de la difracción, mecánica cuántica, etc.). Las transformadas integrales se presentan en forma de apuntes esquemáticos y sin demostraciones.

1 Transformadas integrales

Definición 1.1 (Transformada integral). *La transformada integral $\mathcal{I}$ respecto el núcleo $K(s,x)$ en el intervalo (a,b) de la función $f(x)$ se define de la forma*

$$\bar{F}(s) = \mathcal{I}\big[f(x)\big] = \int_a^b f(x)K(s,x)\mathrm{d}x \ .$$

Donde s es la variable transformada.

El operador de transformación $\mathcal{I}$ es lineal, así como el operación de transformación inversa $\mathcal{I}^{-1}$.

2 Transformada de Laplace

2.1 Definición

Definición 2.1 (Transformada de Laplace). *La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define por*

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\mathrm{d}x \ .$$

Algunos ejemplos son:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \text{ si } s > a \quad \mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ si } s > 0,\ n \geq 1 \quad \mathcal{L}\left[\mathbf{J}_0(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+s}} ,$$

$$\mathcal{L}\left[\sin at\right] = \frac{a}{s^2+a^2} \text{ si } s > 0 \qquad \mathcal{L}\left[\cos at\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \text{ si } s > 0 ,$$

$$\mathcal{L}\left[\sinh at\right] = \frac{a}{s^2-a^2} \text{ si } s > |a| \qquad \mathcal{L}\left[\cosh at\right] = \frac{s}{s^2-a^2} \text{ si } s > |a| .$$

Definición 2.2 (Función de orden exponencial). *La función $f(t)$ es de orden exponencial si $\exists a > 0$ tal que $e^{at}\left|f(x)\right|$ está acotada $\forall t > T$. De otra manera, $\exists M > 0$ tal que $\forall t > T$ se cumple $\left|f(t)\right| \leq Me^{at}$. También se escribe $f(t) = o(e^{at})$.*

Teorema 2.3 (Teorema de existencia). *Sea $f(x)$ continua a trozos en $\left[0, T\right]$, y de orden exponencial. Entonces, existe la transformada de Laplace $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ para $s > a$.*

2.2 Teoremas fundamentales

Los siguientes teoremas serán útiles para resolver ecuaciones diferenciales así como hallar transformadas inversas.

Teorema 2.4 (Teorema de traslación). *Sea $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$, entonces se cumple*

$$\mathcal{L}\left[e^{et} f(t)\right] = F(s-a) .$$

Teorema 2.5 (Segundo teorema de traslación). *Sea $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ y $\theta(t-a)$ la función escalón de Heaviside, entonces*

$$\mathcal{L}\left[\theta(t-a) f(t-a)\right] = e^{-as} F(s) .$$

Teorema 2.6 (Teorema de escala). *Si $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ y $c > 0$, entonces*

$$\mathcal{L}\left[f(ct)\right] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right) .$$

Teorema 2.7 (Transformada de $t^n f(x)$). *Sea $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$, entonces*

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) .$$

2.3 Teoremas de integración y derivación

En utilizar la transformada de Laplace en ecuaciones diferenciales, las condiciones iniciales aparecen en transformar las derivadas de la función incógnita. Para obtener la ecuación general se asigna un valor constante a las condiciones iniciales. Este método suele ser útil tan solo si los coeficientes de la ecuación diferencial son polinomios de orden menor que el grado de la ecuación.

Teorema 2.8 (Teorema de diferenciación). *Sea $f(t)$ continua y derivable por partes en $0 \leq t \leq T$, sea $f(t)$ de orden exponencial. Entonces existe la transformada de Laplace de la derivada y su valor es*

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}x}\right] = s\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0) \ .$$

En general, para $n \geq 1$, se tiene

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}\left[f(t)\right] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \ .$$

Teorema 2.9 (Transformada de derivadas parciales). *Sea $u(x,t)$ una función de dos variables, y $\mathcal{L}_t\left[u(x,t)\right]$ la transformada de Laplace respecto t. Entonces*

$$\mathcal{L}_t\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = s\mathcal{L}_t\left[u(x,t)\right] - u(x,0) \ ,$$

$$\mathcal{L}_t\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_t\left[u(x,t)\right] \ .$$

En general,

$$\mathcal{L}_t\left[\frac{\partial^{n+m}u(x,t)}{\partial x^n \partial t^m}\right] = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(s^m\mathcal{L}_t\left[u(x,t)\right] - \sum_{i=0}^{m-1} s^{(m-1)-i}\left.\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}\right) \ .$$

Teorema 2.10 (Teorema de integración). *Si $\exists\mathcal{L}\left[f(t)\right]$, entonces se cumple*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{\mathcal{L}\left[f(t)\right]}{s} \ .$$

Definición 2.11 (Producto de convolución). *El producto de convolución de dos funciones f y g se define*

$$\big(f * g\big)(x) = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \ .$$

Este producto es asociativo, distributivo respecto la suma y conmutativo.

Teorema 2.12 (Teorema de convolución). *Sea $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ y $G(s) = \mathcal{L}\left[g(t)\right]$, entonces*

$$\mathcal{L}\left[\big(f * g\big)\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = F(s)G(s) \ .$$

2.4 Transformada de Laplace inversa

Teorema 2.13 (Teorema de Lerch). *Sean f y g continuas por partes, ambas de orden exponencial. Si $\exists s_0$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]\, \forall s > s_0$, entonces $f(t) = g(t)$ excepto, quizás, en los puntos de discontinuidad. Es decir, la transformada inversa es única.*

Existen diversos métodos para hallar la transformada inversa de una función:

- *Descomposición en fracciones simples:* Aplicable a funciones racionales polinómicas. Se descompone la función en fracciones simples, cuya transformada inversa es conocida (exponenciales, funciones trigonométricas, etc.).

- *Teorema de convolución:* Aplicable cuando la función es producto de dos transformadas:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \ .$$

- *Segundo teorema de traslación:* Si $\theta(t-a)$ es la función escalón, tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = \theta(t-a)f(t-a) \ .$$

Teorema 2.14 (Formula de la transformada inversa de Laplace). *A través de la transformada de Fourier que veremos más adelante, podemos encontrar la siguiente formula para encontrar la transformada inversa de Laplace:*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs}\mathcal{L}[f(x)]\,\mathrm{d}s \ .$$

3 Transformada de Fourier

3.1 Integral de Fourier

Extendiendo las series de Fourier a intervalos infinitos se puede deducir el siguiente

Teorema 3.1 (Teorema integral de Fourier). *Sea $f(x)$ suave por partes, y absolutamente integrable en el eje real. Entonces, se cumple:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(x^+) + f(x^-)\Big] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha \ .$$

Para funciones pares, se tiene

$$f(x) = f(-x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\mathrm{d}\alpha \int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t \ .$$

Para funciones impares, se tiene

$$f(x) = -f(-x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty f(t)\sin\alpha t \mathrm{d}t \ .$$

Este teorema se puede escribir de otra manera más similar a las series de Fourier

$$f(x) = \int_0^\infty \Big(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\Big)\mathrm{d}\alpha \ ,$$

donde

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha t \mathrm{d}t, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\alpha t \mathrm{d}t \ .$$

Otra manera más útil de escribir el teorema Integral de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha t}\mathrm{d}t\right] e^{-i\alpha x}\mathrm{d}\alpha \ .$$

3.2 Transformada de Fourier

A partir del teorema integral de Fourier, se puede definir la transformada de Fourier:

Definición 3.2 (Transformada de Fourier). *Sea $f(x)$ continua, suave y absolutamente integrable en $(-\infty,\infty)$. La transformada de Fourier*

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] \equiv F(\alpha) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha t}\mathrm{d}t \ ,$$

entonces, $\forall x$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha)\right] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)e^{-i\alpha x}\mathrm{d}\alpha \ .$$

De igual manera, podemos definir

Definición 3.3 (Transformada de Fourier en seno). *Sea $f(x)$ continua, suave y absolutamente integrable en $(0,\infty)$ extendida impar a $(-\infty,\infty)$. La transformada de Fourier en seno es*

$$\mathcal{F}_S\left[f(x)\right] \equiv F_S(\alpha) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t \mathrm{d}t \ ,$$

entonces, $\forall x$ tenemos

$$\mathcal{F}_S^{-1}\left[F(\alpha)\right] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_S(\alpha)\sin\alpha t \mathrm{d}\alpha \ .$$

Definición 3.4 (Transformada de Fourier en coseno). *Sea $f(x)$ continua, suave y absolutamente integrable en $(0,\infty)$ extendida par a $(-\infty,\infty)$. La transformada de Fourier en coseno es*

$$\mathcal{F}_C\left[f(x)\right] \equiv F_C(\alpha) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t \mathrm{d}t \ ,$$

entonces, $\forall x$ tenemos

$$\mathcal{F}_C^{-1}\left[F(\alpha)\right] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_C(\alpha)\cos\alpha t \mathrm{d}\alpha \ .$$

3.3 Propiedades de la transformada de Fourier

Los siguientes teoremas, expresan las propiedades más útiles de la transformada de Fourier.

Teorema 3.5 (Teorema de linealidad). *Para todo par de funciones, cuyas transformadas de Fourier existan, y $\forall a,b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\mathcal{F}\left[af(x)+bg(x)\right] = a\mathcal{F}\left[f(x)\right] + b\mathcal{F}\left[g(x)\right] \ .$$

Teorema 3.6 (Teorema de traslación). *Para toda función cuya transformada de Fourier existe, si $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\mathcal{F}\left[f(t-c)\right] = e^{i\alpha c}\mathcal{F}\left[f(t)\right] \ .$$

Teorema 3.7 (Teorema de escala). *Para toda función cuya transformada de Fourier existe $F(\alpha) = \mathcal{F}\left[f(t)\right]$, si $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\mathcal{F}\left[f(ct)\right] = \frac{1}{|c|}F(\frac{\alpha}{c}) \ .$$

Teorema 3.8 (Teorema de diferenciación). *Sea $f(x)$ continua y suave por partes en todo el eje real. Sea $f(x)\to 0$ si $|x|\to\infty$. Sean $f(x)$ y $f'(x)$ absolutamente integrables para todo x. Entonces*

$$\mathcal{F}\left[f'(x)\right] = -i\alpha\mathcal{F}\left[f(x)\right] \ .$$

En general, si las derivadas sucesivas cumplen las condiciones, tenemos

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (-i\alpha)^n\mathcal{F}\left[f(x)\right] \ .$$

Si $u = u(x,y)$ es una función de varias variables, entonces podemos generalizar el resultado anterior:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^{n+m}u(x,y)}{\partial x^n\partial y^m}\right] = (-i\alpha)^n\frac{\partial^m}{\partial x^m}\mathcal{F}\left[f(x)\right] \ .$$

Definición 3.9 (Producto de convolución). *Sean un par de funciones $f(x)$ y $g(x)$. El producto de convolución se define mediante la integral*

$$(f * g)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \ .$$

Teorema 3.10 (Teorema de convolución). *Sea un par de funciones tal que su producto de convolución existe. Entonces, se cumple*

$$\mathcal{F}\left[(f * g)(x)\right] = \mathcal{F}\left[f(x)\right] \mathcal{F}\left[g(x)\right] \ .$$

O lo que es lo mismo

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha)G(\alpha)\right] = (f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \ .$$

Teorema 3.11 (Teorema de Parseval). *Para toda función $f(x)$ tal que existe su transformada de Fourier $F(\alpha) = \mathcal{F}\left[f(x)\right]$, se cumple*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\alpha) \right|^2 \mathrm{d}\alpha \ .$$

3.4 Transformada de Fourier de las funciones escalón, impulso y delta de Dirac

A partir de la semejanza entre la definición de la función delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) \mathrm{d}x = f(a) \ .$$

y el teorema integral de Fourier podemos encontrar una representación para la delta de Dirac:

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(t-x)} \mathrm{d}\alpha \ .$$

Otra representación posible es el límite de una sucesión de campanas gaussianas

$$\delta(t-\xi) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \ e^{-\frac{(x-\xi)}{4kt}} \ .$$

Otra representación de la delta es el límite la función impulso

$$p_\epsilon = \left\{ \begin{array}{ll} h & a-\epsilon < x < a+\epsilon \\ 0 & x \leq a-\epsilon; x \geq a+\epsilon \end{array} \right. \ .$$

la transformada de Fourier de esta función se puede calcular

$$\mathcal{F}\left[p_\epsilon(x)\right] = \frac{2h\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \ e^{i\alpha a} \frac{\sin \alpha\epsilon}{\alpha\epsilon} \ ,$$

tomando $h = \frac{1}{2\epsilon}$, la integral a todo el eje real de la función impulso es la unidad. Así, pues, podemos representar la delta de Dirac mediante el límite

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon \to 0} p_\epsilon(x) \ .$$

Así, pues, podemos definir la transformada de Fourier de la función de Dirac se puede definir mediante el límite de dicha función:

$$\mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right] = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{F}\left[p_\epsilon(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{ia\alpha} \ .$$

Por otra parte, en aplicar la definición habitual de la transformada de Fourier a la función escalón

$$\theta(x-a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases} \ .$$

se encuentra que el resultado no existe, pero se puede definir a partir del límite

$$\mathcal{F}\left[\theta(x-a)\right] = \lim_{\beta \to 0} \mathcal{F}\left[\theta(x-a)e^{-\beta x}\right] = \frac{ie^{i\alpha a}}{\sqrt{2\pi}\alpha} \ .$$

3.5 Diferenciación de las transformadas de seno y coseno

Para las transformadas de Fourier existen teoremas de diferenciación análogos a los generales.

Teorema 3.12 (Diferenciación mediante la transformada de Fourier en coseno). *Sea $f(x)$ y $f'(x)$ que se anulan en $x \to \infty$. Entonces, se cumple*

$$\mathcal{F}_c\left[f''(x)\right] = -\alpha^2 F_C(\alpha) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \ .$$

Teorema 3.13 (Diferenciación mediante la transformada de Fourier en seno). *Sea $f(x)$ y $f'(x)$ que se anulan en $x \to \infty$. Entonces, se cumple*

$$\mathcal{F}_s\left[f''(x)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) - \alpha^2 F_S(\alpha) \ .$$