Suma de Potencias

Gastón Rafael Burrull Naredo

22 de marzo de 2009

Resumen

En este documento veremos una explicación completamente detallada de algunas fórmulas básicas de sumatoria, como las sumas de los primeros n naturales, primeros n cuadrados de naturales y primeros n cubos de naturales; la conexión de estas fórmulas con la Propiedad Telescópica, con el Triángulo de Pascal y con el Binomio de Newton que definiremos a través de coeficientes binomiales, el que también nos permitirá hallar la primera generalización. Finalmente hallaremos por recurrencia entre coeficientes, la fórmula polinómica general de la suma de las k-ésimas potencias de los primeros n naturales.

1. Introducción

Hay fórmulas de sumatorias que son muy conocidas, como las que son de la forma

$$\sum_{i=0}^{n} i^k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0, [1]$$

como por ejemplo

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para } k = 1, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } k = 2, \tag{1.2}$$

y que entre ellas destaca esta curiosidad

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2, \text{ para } k = 3, \tag{1.3}$$

donde se ve que $\sum i^3$ es el cuadrado de $\sum i$, por lo que de alguna manera estas fórmulas están relacionadas entre sí. Entonces intentaremos hallar la suma de las k-ésimas potencias de los primeros n naturales[2], es decir

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + \ldots + n^k, \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Cabe destacar que la generalización para la suma de las k-ésimas primeras potencias, la realizó con anterioridad el matemático suizo Jakob Bernoulli (1654-1705).

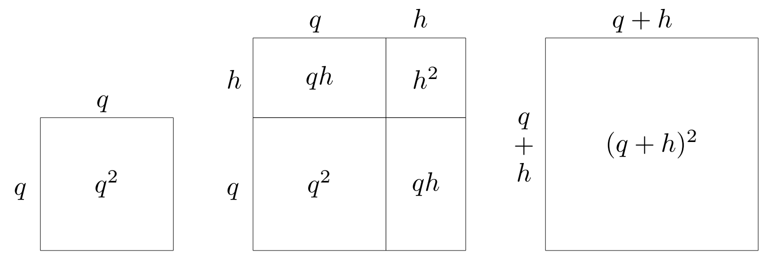
[1] La notación $\mathbb{N}_0$ corresponde al conjunto de los números cardinales, que contiene en su totalidad a los números naturales $\mathbb{N}$ y además al número 0.

[2] En estos casos se podría hablar de los primeros $n+1$ cardinales, pero se pueden considerar todas las sumatorias de este tipo partiendo de 0 ó de 1, ya que el resultado no cambia, porque el término evaluado en 0 da 0.

2. Método de las Capas (Propiedad Telescópica)

Comenzaremos explicando el método geométrico de las capas de cuadrados, que en particular, nos servirá para hallar $\sum i$ la sumatoria lineal (1.1).

Bueno, para empezar supongamos que tenemos un cuadrado de lado q, y queremos que el lado del cuadrado aumente en h, para lograr ello, deberemos agregar un área o *capa* determinada, como muestra la figura a continuación.



Si nos fijamos bien en la figura, podemos notar que

$$q^2 + 2qh + h^2 = (q+h)^2,\ \forall\ q, h \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

Ahora si queremos que un cuadrado de lado q, que llamaremos de ahora en adelante A_q, aumente su lado en sólo una unidad $h = 1$, para que se forme un cuadrado de lado $q+1$, le agregaremos una capa llamada C_q, con lo que según (2.1) queda

$$(q+1)^2 = q^2 + 2q + 1,\ \forall\ q \in \mathbb{R}^+,$$

que utilizando nuestra nueva notación, queda así

$$A_{q+1} = A_q + C_q,\ \forall\ q \in \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

De ahora en adelante, centraremos nuestra atención en los cuadrados con lados de valores naturales, es decir, con $q \in \mathbb{N}$. Empezando con un cuadrado de lado 1, se cumple por (2.2) que

$$A_1 + C_1 = A_2.$$

Si ahora al cuadrado A_1 le vamos sumando capa por capa

$$\begin{array}{lllllllll}
A_1 + C_1 = & A_2 & & & & & & & \\
& A_2 & +C_2 = & A_3 & & & & & \\
& & & A_3 & +C_3 = & A_4 & & & \\
& & & & & A_4 & +C_4 = & A_5 & \\
A_1 + C_1 & & +C_2 & & +C_3 & & +C_4 = & A_5, &
\end{array}$$

entonces, tenemos que

$$A_1 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = A_{n+1},$$

dejando a un lado las capas

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = A_{n+1} - A_1,$$

o sea, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = A_{n+1} - A_1,$$

y recordando (2.2) tenemos que $C_q = A_{q+1} - A_q$ entonces,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} A_{i+1} - A_i = A_{n+1} - A_1} \tag{2.3}$$

esta fórmula se conoce como **Propiedad Telescópica**.

Ahora podemos proceder a calcular nuestra primera sumatoria. Como $A_q = q^2$, entonces reescribiendo (2.3) nos queda

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - 1 &= \sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - i^2 \\
n^2 + 2n &= \sum_{i=1}^{n} (2i+1) \\
n^2 + 2n &= \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
n^2 + 2n &= 2\sum_{i=1}^{n} i + n \\
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

acá lo que hemos hecho es despejar $\sum i$, por lo que hemos obtenido el resultado de la suma (1.1),[3]

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ahora utilizaremos el mismo método, pero en vez de capas de cuadrados, lo haremos con capas de cubos, es decir $A_q = q^3$, esto nos servirá para poder despejar $\sum i^2$ y obtener el resultado de la fórmula (1.2). Volviendo a (2.3) tenemos que,

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1 &= \sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - i^3 \\
n^3 + 3n^2 + 3n &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1) \\
n^3 + 3n^2 + 3n &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \qquad \Big/ \text{Usamos (1.1)} \\
n^3 + 3n^2 + 3n &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \\
n^3 + 3n^2 + 2n &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} \\
3\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},
\end{aligned}$$

[3]En el desarrollo, se ha considerado obvio que $\sum 1 = n$, que corresponde a la sumatoria con $k = 0$, o sea, $\sum i^0$.

o sea,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Teniendo que $A_q = q^4$ y usando nuevamente (2.3), podremos despejar $\sum i^3$ y obtener el resultado de la fórmula (1.3)

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1 &= \sum_{i=1}^{n} (i+1)^4 - i^4 \\
n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n &= \sum_{i=1}^{n} (4i^3 + 6i^2 + 4i + 1) \\
n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n &= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \qquad \Big/ \text{Usamos (1.1) y (1.2)} \\
n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n &= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) \\
4\sum_{i=1}^{n} i^3 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n \\
4\sum_{i=1}^{n} i^3 &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
4\sum_{i=1}^{n} i^3 &= n^2(n^2 + 2n + 1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \Big/ \text{Usamos (1.1)} \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2,
\end{aligned}$$

o sea,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2.$$

3. Generalización del método con el Binomio de Newton

Como las 3 sumatorias anteriores las hemos obtenido con el mismo método, podríamos perfectamente seguir calculando las sumatorias para los siguientes valores cardinales de k. Si nos fijamos en cada sumatoria de potencia k, se obtuvo con un polinomio de grado $k+1$, pero al generalizar e intentar despejar $\sum i^k$ nos encontramos con un pequeño problema al intentar hallar (1.4), ya que si $A_q = q^{k+1}$, entonces al usar (2.3) nos queda

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^{k+1} - i^{k+1}, \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

y como vemos, en ambos lados de la ecuación hay un binomio de grado $k+1$, es decir,

$$(a+b)^{k+1} = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)\cdot(a+b)}_{k+1 \text{ veces}}, \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

por lo que para calcular el polinomio final, hay una serie de combinaciones que nos entrega el **Triángulo de Pascal**, donde cada número es la suma de los dos números que se ubican arriba

$$\begin{array}{c} 1 \quad \Longrightarrow\ 2^0=(1+1)^0 \\ 1 \quad 1 \quad \Longrightarrow\ 2^1=(1+1)^1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad \Longrightarrow\ 2^2=(1+1)^2 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad \Longrightarrow\ 2^3=(1+1)^3 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad \Longrightarrow\ 2^4=(1+1)^4 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \quad \Longrightarrow\ 2^5=(1+1)^5, \\ \vdots \end{array}$$

como vemos, la suma de los números de cada piso del triángulo corresponde a las potencias de 2. Pero el triángulo también nos sirve para determinar los coeficientes de los polinomios resultantes de las potencias de un binomio cualquiera, hacemos $(1+1) \Rightarrow (a+b)$ y nos queda

$$\begin{array}{rcl} 1 & \Longrightarrow & (a+b)^0=\mathbf{1} \\ 1 \quad 1 & \Longrightarrow & (a+b)^1=\mathbf{1}a+\mathbf{1}b \\ 1 \quad 2 \quad 1 & \Longrightarrow & (a+b)^2=\mathbf{1}a^2+\mathbf{2}ab+\mathbf{1}b^2 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & \Longrightarrow & (a+b)^3=\mathbf{1}a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}ab^2+\mathbf{1}b^3 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & \Longrightarrow & (a+b)^4=\mathbf{1}a^4+\mathbf{4}a^3b+\mathbf{6}a^2b^2+\mathbf{4}ab^3+\mathbf{1}b^4 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 & \Longrightarrow & (a+b)^5=\mathbf{1}a^5+\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2+\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4+\mathbf{1}b^5 \\ & \vdots & \end{array}$$

Luego tenemos que los coeficientes del triángulo de pascal, se pueden calcular mediante coeficientes binomiales

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\ \vdots \end{array}$$

donde el coeficiente binomial $\binom{k}{j}$ es el número de subconjuntos de j elementos que se pueden escoger dentro de un conjunto de k elementos. Por lo que usando combinatoria, cada coeficiente binomial se puede expresar de la siguiente manera,

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)\cdot j},\ \forall\ k,j \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq j \geq 0,$$

o bien,

$$\binom{k}{j} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-j)\cdot(k-j+1)\cdots(k-2)\cdot(k-1)\cdot k}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots j)\big(1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-j)\big)},\ \forall\ k,j \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq j \geq 0,$$

lo que con el uso de factoriales [4] se reduce a,

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \ \forall \ k, j \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq j \geq 0. \tag{3.3}$$

Usando (3.3) podemos dejar en forma polinómica toda potencia natural de cualquier binomio,

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-2} + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k, \ \forall \ k \in \mathbb{N}_0,$$ [5]

de otra forma,

$$\boxed{(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j} \tag{3.4}$$

esto se conoce como **Binomio de Newton**, y (3.4) lo podemos usar directamente en (3.2), quedando así,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k-j+1} b^j. \tag{3.5}$$

y como en ambos binomios de la ecuación (3.1) hay un término 1, (3.5) se reduce a

$$(a+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^j. \tag{3.6}$$

Con todo esto, ya estamos listos para desarrollar la expresión que habíamos dejado atrás e intentar despejar $\sum i^k$, entonces recordando (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{i=1}^{n} (i+1)^{k+1} - i^{k+1} \qquad \Big/ \text{Usamos (3.6)} \\
-1 + \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^j &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j - i^{k+1} \\
-1 + \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^j &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} i^j \\
-1 + \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^j &= \sum_{i=1}^{n} \binom{k+1}{k} i^k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} i^j \\
\binom{k+1}{k} \sum_{i=1}^{n} i^k &= -1 + \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} i^j \\
\binom{k+1}{k} \sum_{i=1}^{n} i^k &= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^j - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j
\end{aligned}$$

y ya con esto podemos despejar $\sum i^k$ obteniendo el resultado de (1.4) de manera recursiva,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} n^j - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j}{\displaystyle\binom{k+1}{k}} \tag{3.7}$$

[4] En combinatoria se tiene que $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

[5] En vez de referimos al conjunto de los números cardinales $\mathbb{N}_0$, nos podemos referir al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ que no sean negativos, es decir, de ambas maneras se hace referencia al mismo conjunto.

y ya que según (3.3), tenemos que

$$\binom{k+1}{k} = \frac{(k+1)!}{k!(k+1-k)!} = \frac{(k+1)!}{k!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k} = k+1, \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.8}$$

luego la fórmula (3.7) usando en ella (3.8) se reduce a

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}\left[\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}n^j - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}\sum_{i=1}^{n} i^j\right]. \tag{3.9}$$

4. Sumas en forma de Polinomios

Como nos dimos cuenta en los desarrollos de la sección 2, cuando despejábamos una sumatoria de la forma $\sum i^k$, se obtenía un polinomio de grado $k+1$,[6] también sabemos que un polinomio de grado $k+1$ se escribe así

$$P(n) = \sum_{m=0}^{k+1} a_m n^m = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0 \tag{4.1}$$

y como $\sum i^k$ corresponde a un polinomio de grado $k+1$, entonces tenemos según (4.1) que

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{m=0}^{k+1} a_m n^m = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0, \tag{4.2}$$

ésta es la forma polinómica que intentaremos hallar para $\sum i^k$. No obstante, para ello necesitaremos saber el valor de los coeficientes a_m.

Ahora tomaremos las sumatorias (1.1), (1.2) y (1.3); y las escribiremos en forma de polinomios. Empezaremos con (1.1),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\end{aligned}$$

y nos queda finalmente que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n. \tag{4.3}$$

Seguimos con (1.2),

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}\end{aligned}$$

quedando así

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \tag{4.4}$$

[6] Lo que también se mencionó al inicio de la sección 3.

Finalmente con (1.3),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\\ &= \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\\ &= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}\\ &= \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}n\end{aligned}$$

quedando así

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+0n. \tag{4.5}$$

Observación. Si nos fijamos bien en los resultados anteriores, se cumple en todos que

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \tag{4.6}$$

$$a_k = \frac{1}{2} \tag{4.7}$$

$$a_0 = 0, \tag{4.8}$$

estos coeficientes muestran que existe cierta similitud entre las fórmulas de sumatorias, y si ponemos especial atención en (4.6) nos podemos dar cuenta de algo, los coeficientes dependen de k, pero aún no sabemos el valor de todos ellos, ni por qué existe dicha similitud.

5. Polinomios con Coeficientes Binomiales

Los polinomios obtenidos anteriormente, no nos dan la suficiente información como para poder hallar recurrencia en más coeficientes que los encontrados en la sección 4, pero si recordamos la sección 3, para las sumatorias se obtuvo una forma mucho más completa, que incluía coeficientes binomiales. Recordemos la fórmula (3.7)

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}n^j - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}\sum_{i=1}^{n} i^j}{\displaystyle\binom{k+1}{k}},$$

con esta fórmula calcularemos de mejor manera los coeficientes de las sumatorias.

Lema **5.1** *Para todo $k, j \in \mathbb{Z}$ con $k \geq j \geq 0$ se cumple,*

$$\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}. \tag{5.1}$$

Demostración. Usando (3.3), tenemos que para todo $k, j \in \mathbb{Z}$ con $k \geq j \geq 0$ se cumple,

$$\begin{aligned}\binom{k}{j} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ &= \frac{k!}{(k-j)!j!} \\ &= \frac{k!}{(k-j)!(k-k+j)!} \\ &= \frac{k!}{(k-j)!(k-(k-j))!},\end{aligned}$$

o sea,

$$\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}, \text{ para todo } k, j \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq j \geq 0$$

quedando demostrado el lema.

Ahora, con (5.1) se obtiene de manera trivial que,

$$\binom{k+1}{j} = \binom{k+1}{k-j+1}, \ \forall\ k, j \in \mathbb{Z} \text{ con } k+1 \geq j \geq 0, \tag{5.2}$$

entonces con (5.2), la fórmula (3.7) queda así

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{k-j+1} n^j - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{k-j+1} \sum_{i=1}^{n} i^j}{\dbinom{k+1}{1}}, \tag{5.3}$$

con ella hallaremos nuevamente las primeras sumatorias, pero esta vez dejaremos los coeficientes expresados en función de coeficientes binomiales, sin calcular su valor numérico, además calcularemos $\sum i^0$. Todo esto nos servirá para obtener más detalles de las fórmulas y poder hacer una generalización por recurrencia. Empezemos con $\sum i^0$, por lo tanto haremos el remplazo de $k = 0$ en (5.3),

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{0+1} \binom{0+1}{0-j+1} n^j - \sum_{j=0}^{0-1} \binom{0+1}{0-j+1} \sum_{i=1}^{n} i^j}{\dbinom{0+1}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = \frac{\dbinom{1}{0}}{\dbinom{1}{1}} n. \tag{5.4}$$

Seguimos con $\sum i^1$, donde reemplazaremos $k = 1$ en (5.3)

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{1+1} \binom{1+1}{1-j+1} n^j - \sum_{j=0}^{1-1} \binom{1+1}{1-j+1} \sum_{i=1}^{n} i^j}{\displaystyle\binom{1+1}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \binom{2}{2-j} n^j - \sum_{j=0}^{0} \binom{2}{2-j} \sum_{i=1}^{n} i^j}{\displaystyle\binom{2}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\displaystyle\binom{2}{0} n^2 + \binom{2}{1} n - \binom{2}{2} \sum_{i=1}^{n} i^0}{\displaystyle\binom{2}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} n^2 + \frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} n - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \sum_{i=1}^{n} i^0 \qquad \Big/ \text{Usamos (5.4)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} n^2 + \frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} n - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} n^2 + \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right] n \tag{5.5}$$

que es lo mismo que (4.3), pero sin desarrollar los coeficientes. Seguimos con $\sum i^2$, y reemplazando $k = 2$ en (5.3)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2+1}\binom{2+1}{2-j+1}n^j - \sum_{j=0}^{2-1}\binom{2+1}{2-j+1}\sum_{i=1}^{n} i^j}{\dbinom{2+1}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\binom{3}{3-j}n^j - \sum_{j=0}^{1}\binom{3}{3-j}\sum_{i=1}^{n} i^j}{\dbinom{3}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\dbinom{3}{0}n^3 + \dbinom{3}{1}n^2 + \dbinom{3}{2}n - \dbinom{3}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^1 - \dbinom{3}{3}\sum_{i=1}^{n} i^0}{\dbinom{3}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}n^3 + \frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}}n^2 + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}n - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\sum_{i=1}^{n} i^1 - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\sum_{i=1}^{n} i^0 \qquad \Big/ \text{Usamos (5.4) y (5.5)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}n^3 + \frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}}n^2 + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}n - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\left(\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}n^2 + \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right]n\right) - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}n^3 + \frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}}n^2 + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}n - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}n^2 - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right]n - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}n^3 + \left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}\right]n^2 + \left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right] - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right)n \qquad (5.6)$$

que es lo mismo que (4.4), pero sin desarrollar los coeficientes. Por último con $\sum i^3$, y reemplazando $k = 2$ en (5.3)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\sum_{j=1}^{3+1}\binom{3+1}{3-j+1}n^j - \sum_{j=0}^{3-1}\binom{3+1}{3-j+1}\sum_{i=1}^{n} i^j}{\binom{3+1}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\sum_{j=1}^{4}\binom{4}{4-j}n^j - \sum_{j=0}^{2}\binom{4}{4-j}\sum_{i=1}^{n} i^j}{\binom{4}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\binom{4}{0}n^4 + \binom{4}{1}n^3 + \binom{4}{2}n^2 + \binom{4}{3}n - \binom{4}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \binom{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i^1 - \binom{4}{4}\sum_{i=1}^{n} i^0}{\binom{4}{1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\binom{4}{0}}{\binom{4}{1}}n^4 + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{4}{1}}n^3 + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}n^2 + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}n - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}\sum_{i=1}^{n} i^1 - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{4}{1}}\sum_{i=1}^{n} i^0$$

/Usamos (5.4), (5.5) y (5.6)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\binom{4}{0}}{\binom{4}{1}}n^4 + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{4}{1}}n^3 + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}n^2 + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}n - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}\left(\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}n^2 + \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right]n\right) - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}n -$$
$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\left\{\frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}n^3 + \left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}\right]n^2 + \left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right] - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right)n\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\binom{4}{0}}{\binom{4}{1}}n^4 + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{4}{1}}n^3 + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}n^2 + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}n - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}n^2 + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right]n - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}n -$$
$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}n^3 + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}\right]n^2 + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right] - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right)n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\binom{4}{0}}{\binom{4}{1}}n^4 + \left[\frac{\binom{4}{1}}{\binom{4}{1}} - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}}\right]n^3 + \left(\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}} - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}\right] - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}}\right)n^2 +$$
$$\left\{\frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}} - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}}\left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right] - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right) - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}}\left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right] - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{4}{1}}\frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}}\right\}n. \tag{5.7}$$

6. Coeficientes de los Polinomios de las Sumatorias

Hemos obtenido en la sección 5 los polinomios de las sumatorias, sin detenernos a resolver los coeficientes binomiales, ya que habríamos llegado a los mismos polinomios obtenidos en la sección 4.[7]

Pero lo que nos interesa ahora, es hallar una fórmula para cada coeficiente del polinomio (4.2), entre las pocas fórmulas para algunos coeficientes encontrados en 4, recordemos por ejemplo (4.8)

$$a_0 = 0,$$

a simple vista se ve que es cierto, pero en la sección 5 vimos que en la fórmula (5.3), no se generaban términos libres (o factores de a_0), independientemente del valor de k. Por lo tanto (4.8) se cumple para todo $k \in \mathbb{N}_0$, entonces el polinomio que buscamos (4.2) lo podríamos escribir de una manera un poco más bonita, quedando así:

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{m=0}^{k} a_{k+1-m} \cdot n^{k+1-m} = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1. \tag{6.1}$$

Los polinomios para las sumatorias que hemos obtenido son (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7), que los enlistaremos ordenadamente así:

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} n^2 + \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right] n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}} n^3 + \left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} \right] n^2 + \left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right] - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right) n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{\binom{4}{0}}{\binom{4}{1}} n^4 + \left[\frac{\binom{4}{1}}{\binom{4}{1}} - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}} \frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{1}} \right] n^3 + \left(\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}} - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}} \left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} \right] - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}} \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{1}} \right) n^2 +$$

$$\left\{ \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}} - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{1}} \left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{1}} \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right] - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right) - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{4}{1}} \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right] - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{4}{1}} \frac{\binom{1}{0}}{\binom{1}{1}} \right\} n.$$

Observación. Como bien recordamos en la sección 4 los coeficientes de los polinomios dependían de alguna forma de k. Ahora aquí al ver la lista de sumatorias, podemos darnos cuenta de que los coeficientes de cada polinomio de la forma mencionada en (4.2) tienen una estructura muy similar, y podemos notar fácilmente que en (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7), dichas similitudes existen tal y como nos lo esperábamos, debido a que cada sumatoria se obtuvo mediante un método análogo, descrito y desarrollado en las secciones 2 y 5. Por lo tanto se puede decir que para toda sumatoria de la forma $\sum i^k$, para $k \in \mathbb{N}_0$ con $k \geq 4$, se cumple en los primeros

[7]Téngase en cuenta que las fórmulas de sumatorias obtenidas anteriormente (1.1), (1.2) y (1.3), son las mismas que los polinomios (4.3), (4.4) y (4.5), y también las mismas que los polinomios con coeficientes binomiales (5.5), (5.6) y (5.7), a pesar de verse muy diferentes unas de otras.

4 coeficientes siempre que,

$$a_{k+1} = \frac{\binom{k+1}{0}}{\binom{k+1}{1}} \tag{6.2}$$

$$a_k = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k}{1}} \tag{6.3}$$

$$a_{k-1} = \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \left[\frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{k-1}{0}}{\binom{k-1}{1}} \right] - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k-1}{0}}{\binom{k-1}{1}} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} a_{k-2} = {} & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \left(\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} \left[\frac{\binom{k-1}{1}}{\binom{k-1}{1}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{k-1}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right] - \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right) - \\ & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} \left[\frac{\binom{k-1}{1}}{\binom{k-1}{1}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{k-1}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right] - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Y si recordamos (4.6) y (4.7) teníamos que,

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$$
$$a_k = \frac{1}{2}.$$

Lema **6.1** *Para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 0$ se cumple que* (4.6) *es cierto y también que,*

$$a_{k+1} = \frac{\binom{k+1}{0}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k+1}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 0. \tag{6.6}$$

Demostración. Usando (6.2) y luego (3.3), tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 0$ se cumple,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{\binom{k+1}{0}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\frac{(k+1)!}{0!(k+1-0)!}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)!}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{1}{\binom{k+1}{1}} \\
&= \frac{\frac{j!}{j!}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\frac{j!}{0!(j-0)!}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k+1}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 0 \\
&= \frac{\binom{k+1}{0}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\binom{k+1}{0}}{\frac{k+1!}{1!(k+1-1)!}} \\
&= \frac{\binom{k+1}{0}}{\frac{(k+1)!}{k!}} = \frac{1}{k+1},
\end{aligned}$$

o sea,

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1} = \frac{\binom{k+1}{0}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k+1}{1}}, \text{ para todo } k, j \in \mathbb{Z} \text{ con } k, j \geq 0 \tag{6.7}$$

quedando demostrado el lema.

Ahora lo que buscaremos, será reducir cada uno de los coeficientes del polinomio y dejarlos en función de k, que como recordamos, es el exponente de nuestra sumatoria buscada. Comenzaremos con el coeficiente (6.2) que usando (6.6) se reduce así

$$a_{k+1} = \frac{\binom{k+1}{0}}{\binom{k+1}{1}} = \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k+1}{1}}, \text{ para todo } k, j \in \mathbb{Z} \text{ con } k, j \geq 0,$$

o sea, con $j = k$ nos queda,

$$a_{k+1} = \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k+1}{1}}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 0. \tag{6.8}$$

LEMA **6.2** *Para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 1$ se cumple que (4.7) es cierto y también que,*

$$a_k = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k}{1}} = \frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{\binom{j+1}{2}}{\binom{j+1}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{j}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 1. \tag{6.9}$$

Demostración. Usando (6.3) y luego (3.3), tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 1$ se cumple,

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k}{1}} = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\frac{(k+1)!}{2!\big((k+1)-2\big)!}}{\frac{k!}{1!(k-1)!}} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k+1}{1}} \qquad /\text{Usamos (6.7)} \\
&= \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{1!(k+1)!(k-1)!}{2!k!(k-1)!(k+1)!} = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{(k+1)!}{2!k!(k-1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
&= \frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{1!(j+1)!(j-1)!}{2!j!(j-1)!(j+1)!} = \frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{\binom{j+1}{2}}{\binom{j+1}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{j}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 1,
\end{aligned}
$$

o sea,

$$
a_k = \frac{1}{2} = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k}{1}} = \frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{\binom{j+1}{2}}{\binom{j+1}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{j}{1}}, \ \forall\ k, j \in \mathbb{Z} \text{ con } k, j \geq 1
$$

quedando demostrado el lema.

Seguimos con el coeficiente (6.3), que usando (6.9) y luego (6.8) nos queda que para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 1$, se cumple que

$$
a_k = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k}{1}} = \frac{\binom{k+1}{1}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k}{1}} a_{k+1} = 1 - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k}{1}} a_{k+1},
$$

o sea,

$$
a_k = \frac{\binom{k}{1} - \binom{k+1}{2} a_{k+1}}{\binom{k}{1}}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 1. \tag{6.10}
$$

Lema **6.3** *Para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 3$ se cumple que,*

$$
\frac{\binom{j}{2}}{\binom{j}{1}} = \frac{\binom{j-1}{2}}{\binom{j-2}{1}}. \tag{6.11}
$$

Demostración. Usando (3.3), tenemos que para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 3$ se cumple,

$$
\begin{aligned}
\frac{\binom{j}{2}}{\binom{j}{1}} &= \frac{\frac{j!}{2!(j-2)!}}{\frac{j!}{1!(j-1)!}} = \frac{1!(j-1)!}{2!(j-2)!} = \frac{\frac{(j-1)!}{2!}}{\frac{(j-2)!}{1!}} \\
&= \frac{\frac{(j-1)!}{2!(j-3)!}}{\frac{(j-2)!}{1!(j-3)!}} = \frac{\frac{(j-1)!}{2!\big((j-1)-2\big)!}}{\frac{(j-2)!}{1!\big((j-2)-1\big)!}},
\end{aligned}
$$

o sea,

$$\frac{\binom{j}{2}}{\binom{j}{1}} = \frac{\binom{j-1}{2}}{\binom{j-2}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 3$$

quedando demostrado el lema.

Seguimos con el coeficiente (6.4), que con (3.3), para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 2$, se tiene

$$a_{k-1} = \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}}\left[\frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}}\frac{\binom{k-1}{0}}{\binom{k-1}{1}}\right] - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}}\frac{\binom{k-1}{0}}{\binom{k-1}{1}},$$

luego hacemos $j+1=k$ y luego para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 2$, tenemos que,

$$\begin{aligned}
a_{k-1} &= \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}}\left[\frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{\binom{j+1}{2}}{\binom{j+1}{1}}\frac{\binom{j}{0}}{\binom{j}{1}}\right] - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}}\frac{\binom{j}{0}}{\binom{k-1}{1}} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 1, \\
&\Big/ \text{Usamos (6.6) y (6.9)} \\
&= \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}}a_k - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k-1}{1}}a_{k+1} \qquad \Big/ \text{Como } k+1 \geq 3 \text{ usamos (6.11)} \qquad (6.12) \\
&= \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k-1}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k-1}{1}}a_k - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k-1}{1}}a_{k+1},
\end{aligned}$$

o sea,

$$a_{k-1} = \frac{\binom{k}{2} - \binom{k}{2}a_k - \binom{k+1}{3}a_{k+1}}{\binom{k-1}{1}}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 2. \tag{6.13}$$

LEMA **6.4** *Para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 3$ se cumple que,*

$$\frac{\binom{j+1}{2}\binom{j}{3}}{\binom{j-2}{1}} = \frac{\binom{j}{2}\binom{j+1}{3}}{\binom{j-1}{1}}. \tag{6.14}$$

Demostración. Usando (3.3), tenemos que para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 3$ se cumple,

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{j+1}{2}\binom{j}{3}}{\binom{j-2}{1}} &= \frac{\frac{(j+1)!}{2!(j-1)!}\frac{j!}{3!(j-3)!}}{\frac{(j-2)!}{1!(j-3)!}} = \frac{\frac{(j+1)!}{2!(j-1)!}\frac{j!}{3!(j-2)!}}{\frac{(j-2)!}{1!(j-2)!}} \\
&= \frac{\frac{j!}{2!(j-2)!}\frac{(j+1)!}{3!(j-2)!}}{\frac{(j-1)!}{1!(j-2)!}} = \frac{\frac{(j+1)!}{3!(j-2)!}\frac{j!}{2!(j-2)!}}{\frac{(j-1)!}{1!(j-2)!}},
\end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{\binom{j+1}{2}\binom{j}{3}}{\binom{j-2}{1}} = \frac{\binom{j+1}{3}\binom{j}{2}}{\binom{j-1}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 3$$

quedando demostrado el lema.

Lema **6.5** *Para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 3$ se cumple que,*

$$\frac{\binom{j+1}{3}}{\binom{j+1}{1}} = \frac{\binom{j}{3}}{\binom{j-2}{1}}. \tag{6.15}$$

Demostración. Usando (3.3), tenemos que para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 3$ se cumple,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{j+1}{3}}{\binom{j+1}{1}} &= \frac{\frac{(j+1)!}{3!(j-2)!}}{\frac{(j+1)!}{1!j!}} = \frac{\frac{(j+1)j(j-1)}{3!}}{\frac{(j+1)}{1!}} \\ &= \frac{\frac{j(j-1)(j-2)}{3!}}{\frac{(j-2)}{1!}} = \frac{\frac{j!}{3!(j-3)!}}{\frac{(j-2)!}{1!(j-3)!}}\end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{\binom{j+1}{3}}{\binom{j+1}{1}} = \frac{\binom{j}{3}}{\binom{j-2}{1}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ con } j \geq 3$$

quedando demostrado el lema.

Seguimos con el coeficiente (6.5), que con (3.3), para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 3$, se tiene

$$\begin{aligned}a_{k-2} = \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \left(\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} \left[\frac{\binom{k-1}{1}}{\binom{k-1}{1}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{k-1}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right] - \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right) - \\ \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} \left[\frac{\binom{k-1}{1}}{\binom{k-1}{1}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{k-1}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right] - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k-2}{0}}{\binom{k-2}{1}},\end{aligned}$$

luego hacemos $j+2=k$ y luego para todo $k,j\in\mathbb{Z}$ con $k\geq 3, j\geq 1$, tenemos que,

$$
\begin{aligned}
a_{k-2} = {} & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \left(\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} \left[\frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{\binom{j+1}{2}}{\binom{j+1}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{j}{1}} \right] - \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right) - \\
& \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} \left[\frac{\binom{j+1}{1}}{\binom{j+1}{1}} - \frac{\binom{j+1}{2}}{\binom{j+1}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{j}{1}} \right] - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k-2}{1}} \qquad \Big/ \text{Usamos (6.6) y (6.9)} \\
= {} & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \left(\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} a_k - \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k-2}{1}} \right) - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1} \\
= {} & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} + \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} a_k + \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{j}{0}}{\binom{k-2}{1}} - \\
& \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1} \qquad \Big/ \text{Usamos (6.6)} \\
= {} & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} + \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} a_k + \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k}{1}} \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1} - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1} \\
& \Big/ \text{Usamos (6.14)} \\
= {} & \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} + \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} a_k + \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k-1}{1}} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} a_{k+1} - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1},
\end{aligned}
$$

luego para todo $k\in\mathbb{Z}$ con $k\geq 3$, tenemos,

$$
a_{k-2} = \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} \left(\frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} + \frac{\binom{k+1}{2}}{\binom{k+1}{1}} a_k + \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k-1}{1}} a_{k+1} \right) - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1},
$$

ahora con (6.12) tenemos que para todo $k\in\mathbb{Z}$ con $k\geq 3$, queda así,

$$
a_{k-2} = \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} - \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{1}} a_{k-1} - \frac{\binom{k+1}{3}}{\binom{k+1}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1},
$$

después usamos (6.11) y (6.15), y luego para todo $k\in\mathbb{Z}$ con $k\geq 3$, tenemos,

$$
a_{k-2} = \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k-2}{1}} - \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{k-2}{1}} a_{k-1} - \frac{\binom{k}{3}}{\binom{k-2}{1}} a_k - \frac{\binom{k+1}{4}}{\binom{k-2}{1}} a_{k+1},
$$

o sea,

$$a_{k-2} = \frac{\dbinom{k}{3} - \dbinom{k-1}{2}a_{k-1} - \dbinom{k}{3}a_k - \dbinom{k+1}{4}a_{k+1}}{\dbinom{k-2}{1}}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 3. \tag{6.16}$$

7. Fórmula Polinómica General

En la sección 5, vimos lo parecidas que eran las fórmulas de sumatoria para los diferentes valores de $k \in \mathbb{N}_0$, luego en la sección 6, hallamos las fórmulas de los primeros coeficientes y las reducimos.

Ahora colocaremos los coeficientes (6.8), (6.10), (6.13) y (6.16), en la siguiente lista,

$$a_{k+1} = \frac{\dbinom{k}{0}}{\dbinom{k+1}{1}}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 0$$

$$a_k = \frac{\dbinom{k}{1} - \dbinom{k+1}{2}a_{k+1}}{\dbinom{k}{1}}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 1$$

$$a_{k-1} = \frac{\dbinom{k}{2} - \dbinom{k}{2}a_k - \dbinom{k+1}{3}a_{k+1}}{\dbinom{k-1}{1}}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 2$$

$$a_{k-2} = \frac{\dbinom{k}{3} - \dbinom{k-1}{2}a_{k-1} - \dbinom{k}{3}a_k - \dbinom{k+1}{4}a_{k+1}}{\dbinom{k-2}{1}}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \geq 3,$$

con esta lista de coeficientes, y con las restricciones de k para ellos, nos damos cuenta que efectivamente el polinomio (6.1) puede tener como máximo $k+1$ términos definidos,

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{m=0}^{k} a_{k+1-m} \cdot n^{k+1-m} = \underbrace{a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1}_{k+1 \text{ términos}}.$$

Observación. Nos podemos dar cuenta al ver la lista de coeficientes, la recurrencia entre ellos. Recordemos que k es una constante, y que la variable que teníamos en (6.1) era m, luego podemos notar, que esta variable actúa sobre el subíndice del coeficiente a_{k+1}, restándole su valor y dejando a_{k+1-m}. De igual manera, la variable m afecta el valor del coeficiente en el numerador y en el denominador, de la siguiente forma; m es el valor que tiene el miembro inferior del único coeficiente binomial positivo del numerador y los demás coeficientes binomiales son afectados por m en el miembro superior, restando su cantidad. Además, se ve que siempre que un coeficiente binomial multiplica algún coeficiente recurrente del polinomio, el valor del miembro superior de este coeficiente binomial, es igual al subíndice del coeficiente del polinomio al cual multiplica.

Todo esto se puede visualizar de manera más fácil a continuación.

Supongamos que $k \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 4$, tenemos entonces, que los primeros 4 coeficientes son:

$$a_{k+1} = \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k+1}{1}}, \text{ para } m = 0$$

$$a_k = \frac{\binom{k}{1} - \binom{k+1}{2} a_{k+1}}{\binom{k}{1}}, \text{ para } m = 1$$

$$a_{k-1} = \frac{\binom{k}{2} - \binom{k}{2} a_k - \binom{k+1}{3} a_{k+1}}{\binom{k-1}{1}}, \text{ para } m = 2$$

$$a_{k-2} = \frac{\binom{k}{3} - \binom{k-1}{2} a_{k-1} - \binom{k}{3} a_k - \binom{k+1}{4} a_{k+1}}{\binom{k-2}{1}}, \text{ para } m = 3,$$

entonces,

$$a_{k+1-m} = \frac{\binom{k}{m}}{\binom{k+1-m}{1}}, \text{ para } m = 0$$

$$a_{k+1-m} = \frac{\binom{k}{m} - \binom{k+2-m}{2} a_{k+2-m}}{\binom{k+1-m}{1}}, \text{ para } m = 1$$

$$a_{k+1-m} = \frac{\binom{k}{m} - \binom{k+2-m}{2} a_{k+2-m} - \binom{k+3-m}{3} a_{k+3-m}}{\binom{k+1-m}{1}}, \text{ para } m = 2$$

$$a_{k+1-m} = \frac{\binom{k}{m} - \binom{k+2-m}{2} a_{k+2-m} - \binom{k+3-m}{3} a_{k+3-m} - \binom{k+4-m}{4} a_{k+4-m}}{\binom{k+1-m}{1}}, \text{ para } m = 3,$$

Observación. Desde a_k en adelante, se puede notar que en el numerador aparecen términos negativos, caracterizados por ser un producto entre un coeficiente binomial y un coeficiente del polinomio, donde la cantidad de estos términos negativos está dada por m términos. Además se puede observar que en cada coeficiente binomial de término negativo hay un número que está en la parte superior e inferior del coeficiente binomial y además se encuentra en el subíndice del coeficiente del polinomio al que multiplica; este número aumenta en una unidad en el término negativo de la derecha, y se puede notar que el valor de este número en los coeficientes varía entre 2 y $m + 1$.

Siguiendo las reglas del juego para los siguientes m, podemos deducir cómo serían los siguientes coeficientes de nuestro polinomio. Supongamos que nuestra sumatoria es de valor k lo suficientemente grande como para albergar varios coeficientes, entonces los coeficientes del polinomio (6.1) serían los siguientes:

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + a_{k-2}n^{k-2} + a_{k-3}n^{k-3} \ldots + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n^1$$

$$a_{k+1} = \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k+1}{1}}$$

$$a_k = \frac{\binom{k}{1} - \binom{k+1}{2}a_{k+1}}{\binom{k}{1}}$$

$$a_{k-1} = \frac{\binom{k}{2} - \binom{k}{2}a_k - \binom{k+1}{3}a_{k+1}}{\binom{k-1}{1}}$$

$$a_{k-2} = \frac{\binom{k}{3} - \binom{k-1}{2}a_{k-1} - \binom{k}{3}a_k - \binom{k+1}{4}a_{k+1}}{\binom{k-2}{1}}$$

$$a_{k-3} = \frac{\binom{k}{4} - \binom{k-2}{2}a_{k-2} - \binom{k-1}{3}a_{k-1} - \binom{k}{4}a_k - \binom{k+1}{5}a_{k+1}}{\binom{k-3}{1}}$$

$$\vdots$$

$$a_3 = \frac{\binom{k}{k-2} - \binom{4}{2}a_4 - \binom{5}{3}a_5 - \ldots - \binom{k-1}{k-3}a_{k-1} - \binom{k}{k-2}a_k - \binom{k+1}{k-1}a_{k+1}}{\binom{3}{1}}$$

$$a_2 = \frac{\binom{k}{k-1} - \binom{3}{2}a_3 - \binom{4}{3}a_4 - \binom{5}{4}a_5 - \ldots - \binom{k-1}{k-2}a_{k-1} - \binom{k}{k-1}a_k - \binom{k+1}{k}a_{k+1}}{\binom{2}{1}}$$

$$a_1 = \frac{\binom{k}{k} - \binom{2}{2}a_2 - \binom{3}{3}a_3 - \binom{4}{4}a_4 - \ldots - \binom{k-2}{k-2}a_{k-2} - \binom{k-1}{k-1}a_{k-1} - \binom{k}{k}a_k - \binom{k+1}{k+1}a_{k+1}}{\binom{1}{1}}.$$

¡Hemos obtenido los coeficientes como queríamos!. Además de esto, si recordamos lo colocado en la página anterior, nos damos cuenta de que es muy fácil ver que los términos negativos se pueden escribir en forma de sumatoria delimitada por 2 y $m+1$, reduciendo la fórmula de cada coeficiente del polinomio quedando así

$$a_{k+1-m} = \frac{\binom{k}{m} - \sum_{p=2}^{m+1} \binom{k+p-m}{p} a_{k+p-m}}{\binom{k+1-m}{1}}. \tag{7.1}$$

Finalmente, reemplazamos (7.1) en nuestro polinomio (6.1), y así obtenemos la fórmula polinómica general, para la suma de las k-ésimas potencias de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{m=0}^{k} a_{k+1-m} \cdot n^{k+1-m} = \sum_{m=0}^{k} \frac{\binom{k}{m} - \sum\limits_{p=2}^{m+1} \binom{k+p-m}{p} a_{k+p-m}}{\binom{k+1-m}{1}} \cdot n^{k+1-m},$$

o bien,

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + \ldots + n^k = \sum_{m=0}^{k} \frac{\binom{k}{m} - \sum\limits_{p=2}^{m+1} \binom{k+p-m}{p} a_{k+p-m}}{\binom{k+1-m}{1}} \cdot n^{k+1-m}$$

que era la fórmula que queríamos encontrar.

Referencias

[Mario Augusto Bunge] *Rincón Matemático*,
http://rinconmatematico.com/bunge/sumacuadrados/sumacuadrados.htm.

[La Web de Física] *La Web de Física*,
http://forum.lawebdefisica.com/showpost.php?p=28618postcount=36.

e-mail: grburrul@puc.cl