Formulari de Mètodes Matemàtics I

Manel Bosch

Gener 2011

I.PROBABILITAT
EXEMPLES DE FUNCIONS DE DISTRIBUCIÓ

DISTRIBUCIÓ DISTRIBUCIÓ	**DENSITAT DE PROBABILITAT**	**FUNCIÓ CARACTERÍSTICA**	**VALOR MITJÀ**	**VARIANÇA VARIANÇA**
Uniforme	$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \geq x \geq b \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{ibu} - \mathrm{e}^{iau}}{(b-a)iu}$	$\dfrac{(b-a)}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Binomial	$f(x;n,p) = \dbinom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$(q + p\mathrm{e}^{iu})^n$	np	npq
Poisson	$f(x;\lambda) = \dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\exp[\lambda(\mathrm{e}^{iu} - 1)]$	λ	λ
Gaussiana	$f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\exp\left[i\mu u - \dfrac{\sigma^2 u^2}{2}\right]$	μ	σ^2

1. VALORS ESPERATS i MOMENTS

- Siguin X i $f(X)$ definim el valor mitjà o valor esperat de $f(X)$:

$$\langle f(X) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(x)\mathrm{d}x \\ \displaystyle\sum_n f(x_n)P\{X = x_n\} \end{cases}$$

3.1 Moments

- Moments d'X d'ordre n:

$$\langle X^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{d}F_X(x).$$

- El primer moment és el valor mitjà.:

$$\mu \equiv \langle X \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\mathrm{d}x \\ \displaystyle\sum_n x_n P\{X = x_n\} \end{cases}$$

- Moment central:

$$\langle [X - \langle X \rangle]^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n \mathrm{d}F_X(x)$$

- Variança (segon moment central):

$$\mathrm{Var}(X) \equiv \sigma^2 \left\langle [X - \langle X \rangle]^2 \right\rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p_X(x)\mathrm{d}x \\ \displaystyle\sum_n (x_n - \mu)^2 P\{X = x_n\} \end{cases}$$

- σ = desviació típica. $\sigma^2 = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2$

2. FUNCIÓ GENERADORA DE MOMENTS

- La funció generadora de moments és el valor esperat d'e^{tX}, on $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X(t) \equiv \left\langle \mathrm{e}^{tX} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tX} \mathrm{d}F_X(x)$$

i satisfà:

1. $$\langle X^n \rangle = \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} M_X(t)\right|_{t=0} \qquad n \in \{1, 2, \ldots\}$$

2. Si $Y = aX + b$

$$M_Y(t) = \mathrm{e}^{bt} M_X(at)$$

3. FUNCIÓ CARACTERÍSTICA

- La funció característica d'una variable aleatòria real X és el valor esperat de la varaible aleatòria e^{iuX}:

$$\varphi_X(u) = \langle \mathrm{e}^{iuX} \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iux} p_X(x)\mathrm{d}x \\ \sum_n \mathrm{e}^{iux_n} P\{X = x_n\} \end{cases}$$

i verifica:

1. $\varphi(0) = 1; \quad |\varphi(u)| \geq 1 \; \forall u \in \mathbb{R}$
2. Per a $Y = aX + b$ tenim:
$$\varphi_Y(u) = \mathrm{e}^{iub}\varphi_X(au) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$
3. $$\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}\varphi(u)\bigg|_{u=0} \qquad n \in \{1, 2, \ldots\}$$
4. $$\varphi(-u) = \varphi^*(u)$$

La funció característica **sempre** existeix, encara que el valor esperat $\langle X \rangle$ no existeixi.

II. VARIABLE COMPLEXA

1. Condicions Cauchy-Riemann

$$\begin{Bmatrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_y \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} v_\theta = ru_r \\ u_\theta = -rv_r \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} f'(z) = \dfrac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = \mathrm{e}^{-i\theta} = v_y - iu_y = \mathrm{e}^{-i\theta}/r(v\theta - iu\theta)$$

2. Integrals:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

Desigualtat de Darboux:

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int |f(z)||\mathrm{d}z| \qquad \left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L_\gamma \max_{z\in\{\gamma\}} |f(z)|$$

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{w\in\gamma_r}|f(w)|$$

Fórmula de Cauchy i Fórmula de Cauchy per a les derivades:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \qquad f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

3. Sèries

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Sèrie geomètrica: $\dfrac{1}{1-w} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^k$

Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}$$

Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

4. Residus

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f(z), z_i)$$

- **Singularitat evitable**: El residu és $a_{-1} = 0$.
- **Pol d'ordre** p:

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(p-1)!}\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}}\left[(z-z_0)^p f(z)\right]$$

- **Singularitat essencial**: S'ha d'obtenir explícitament a partir del desenvolupament en sèrie de Laurent.

Lemes de Jordan:

1. $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0 \quad \to \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} f(z)\mathrm{d}z = 0$
2. $\displaystyle\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0 \quad \to \quad \lim_{r\to 0}\int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} f(z)\mathrm{d}z = 0$
3. $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \quad \to \quad \lim_{R\to 0}\int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} f(z)\mathrm{e}^{i\lambda z}\mathrm{d}z = 0$
4. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = i\phi\mathrm{Res}\,(f(z), z_0)$