

Resolución de una Ecuación Diferencial. Estudio del péndulo

Félix Pedrera García - Tx.

11 de agosto de 2003

Se ha escrito un programa en FORTRAN 90 que resuelve la ecuación de movimiento del péndulo simple para ángulos pequeños, descrita por la ecuación (1).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = F_0 \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Para ángulos pequeños esta ecuación se puede resolver analíticamente, por lo que podemos comparar los resultados obtenidos numéricamente con el programa de FORTRAN 90 para ciertos valores de las condiciones iniciales y los parámetros, con las soluciones que resultan de resolver analíticamente la ecuación diferencial (1).

1. Movimiento armónico simple

En este caso, no existe fuerza externa actuando sobre el péndulo, y además no está sometido a ningún tipo de amortiguamiento (como una fuerza de rozamiento), por lo que la ecuación (1) queda simplificada a la siguiente forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (2)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial homogénea de segundo orden, obtenemos la siguiente solución

$$\theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (3)$$

con $\omega = \sqrt{g/l}$. Aplicando las condiciones de contorno y los parámetros usados en la primera parte de la práctica, a saber: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $l = 0,5 \text{ m}$, $\theta_0 = \pi/4 \text{ rad}$, $\theta'_0 = 0 \text{ rad/s}$, obtenemos los valores de las constantes $A = \pi/4$, $B = 0$, $\omega = 4,4271 \text{ rad/s}$. Lo cual se corresponde con la amplitud, la frecuencia y el tipo de movimiento sinusoidal que obtenemos al resolver numéricamente la ecuación (2), como se puede ver en la figura 1.

El espacio de fases obtenido numéricamente, (figura 2), corresponde a un movimiento estable, con un punto crítico de tipo centro en el punto $\theta = 0$, de tal manera que el péndulo oscila en torno a ésta posición de equilibrio.

2. Movimiento forzado no amortiguado

En este caso, el péndulo está sometido a una fuerza externa sin ningún tipo de amortiguamiento. La fuerza externa puede ser de cualquier tipo (exponencial, lineal, ...) aunque el movimiento resulta de

mayor interés cuando la propia fuerza externa es armónica, $F = F_0 \cos \omega_0 t$. La ecuación diferencial del péndulo se escribe entonces de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = F_0 \cos \omega_0 t, \quad (4)$$

cuya solución analítica, añadiendo a la solución de la ecuación homogénea una solución particular de tipo armónico, es

$$\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t, \quad (5)$$

donde las constantes c_1 y c_2 vienen determinadas por las condiciones iniciales y $\omega = \sqrt{g/l}$ es la frecuencia natural del péndulo.

2.1. Pulsaciones

Para las condiciones iniciales $\theta_0 = \theta'_0 = 0$, la solución a la ecuación 4 se puede escribir de la forma

$$\theta(t) = A(t) \sin \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \quad (6)$$

donde $A(t)$ es la amplitud del movimiento, que depende del tiempo y vale

$$A(t) = \frac{2F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t. \quad (7)$$

Particularizando al caso en que $\omega \simeq \omega_0$, este movimiento se puede interpretar como un movimiento oscilatorio de frecuencia $(\omega - \omega_0)$, de amplitud armónica variable con frecuencia $(\omega_0 + \omega)$. Como $\omega \simeq \omega_0$, $(\omega_0 + \omega)$ es grande comparado con $(\omega - \omega_0)$, por lo que el movimiento consta de una oscilación rápida con una amplitud que varía lentamente, presentándose el fenómeno de *pulsaciones*, las cuales se obtienen también numéricamente como se puede observar en la figura 3 para los parámetros que se muestran en dicha gráfica.

El espacio de fases para este tipo de movimiento se puede ver en la figura 4, que no es más que una espiral que se va abriendo a medida que aumenta la amplitud del péndulo, y se va cerrando a medida que ésta disminuye. Puesto que se trata de un movimiento periódico ésta espiral se va repitiendo para cada pulso, obteniendo la secuencia de puntos de la figura. Ésta secuencia se simplificó algo respecto a la solución numérica de θ frente a t para observar con mayor claridad el espacio de fases. Así, el intervalo temporal para la simulación de la figura 4 es $0 \leq t < 160$ s, mientras que para el espacio de fases es $0 \leq t < 40$ s, si bien el resultado obtenido hubiera sido el mismo extendiendo el intervalo a 160 s. El espacio de fases corresponde a un nodo en el punto $\theta = 0$, de ahí las espirales sucesivas, aunque este nodo cambia de estable a inestable según la amplitud esté creciendo o decreciendo. Concretamente es un nodo inestable para tiempos entre $2n\pi/|\omega - \omega_0| < t < (2n + 1)\pi/|\omega - \omega_0|$ y estable para $(2n + 1)\pi/|\omega - \omega_0| < t < 2(n + 1)\pi/|\omega - \omega_0|$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

2.2. Resonancia

Cuando la fuerza sinusoidal externa actúa *en fase* con la oscilación natural del péndulo, es decir, $\omega_0 = \omega$, se produce el fenómeno de *resonancia*, tan familiar para los físicos y presente en múltiples situaciones en la vida “real”, como se hizo patente para los habitantes de Tacoma-Narrows, cuando el puente colgante allí construido se vino abajo debido a la acción de un viento racheado de frecuencia,

casualmente, coincidente con la frecuencia natural de oscilación del puente. En la figura 5 se puede ver el puente en plena oscilación resonante.

En este caso la ecuación diferencial (4) se puede escribir como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = F_0 \cos \omega t, \quad (8)$$

con $\omega = g/l$. Por ser la fuerza externa $F_0 \cos \omega t$ solución de la ecuación homogénea, la solución particular de la ecuación (8) será

$$\theta_p = \frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t, \quad (9)$$

por lo que la solución general de la ecuación (8) queda

$$\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t, \quad (10)$$

donde como es habitual, las constantes c_1 y c_2 quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema. De la ecuación (10) puede deducirse que la amplitud del tercer término crecerá linealmente con el tiempo, por lo que el movimiento del péndulo tendrá cada vez mayor amplitud, aumentando indefinidamente cuando se trata de oscilaciones no amortiguadas.

Introduciendo las condiciones y parámetros adecuados en nuestro programa de FORTRAN 90, en concreto haciendo $\omega = \omega_0$, observamos la oscilación resonante que se muestra en la figura 6

El espacio de fases, en la figura 7, muestra una espiral que se abre, dibujo característico de un nodo inestable en $\theta = 0$, de acuerdo con el hecho de que el péndulo se aleja de ésta posición de equilibrio a medida que transcurre el tiempo.

3. Movimiento amortiguado no forzado

En este caso, el péndulo no se ve sometido a ninguna fuerza externa, pero sí experimenta cierta amortiguación, debido a alguna fuerza de rozamiento o alguna otra proporcional a la velocidad, lo cual se manifiesta a través de la constante de amortiguamiento k . La ecuación diferencial para este movimiento es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (11)$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior toma la forma

$$\theta(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (12)$$

donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + \lambda r + \omega = 0$. Resolviéndola obtenemos que $\lambda_1 = (-k + \sqrt{k^4 - 4\omega})/2$ y $\lambda_2 = (-k - \sqrt{k^4 - 4\omega})/2$. Dependiendo del signo del radicando $k^4 - 4\omega$, obtendremos diferentes casos para la solución (12).

1. Movimiento sobreamortiguado. $k > \sqrt{2\omega}$.

En este caso la solución es a la ecuación (11) toma la misma forma de la solución general (12), siendo las raíces λ_1 y λ_2 son reales y distintas, por lo que el movimiento no es ni tan siquiera armónico, y el péndulo tiende a su posición de equilibrio de forma exponencial.

2. Movimiento críticamente amortiguado. $k = \sqrt{2\omega}$.

Cuando esto ocurre, existen dos raíces reales e iguales, por lo que la solución a la ecuación diferencial (11) es $\theta(t) = e^{-kt/2}(c_1 + c_2 t)$. De nuevo el péndulo tiende a la posición de equilibrio a medida que transcurre el tiempo, aunque de forma más lenta que en el caso sobreamortiguado, pues el amortiguamiento es menor.

3. Movimiento subamortiguado. $k < \sqrt{2\omega}$.

En esta situación las raíces de la ecuación característica son distintas y complejas, además de conjugadas la una de la otra, por lo que la solución a la ecuación diferencial del péndulo amortiguado (11) es

$$\theta(t) = e^{-\frac{k}{2}t}(c_1 \cos \omega_a + c_2 \sin \omega_a), \quad (13)$$

con $\omega_a = (\sqrt{4\omega^2 - k^4})/2$. El movimiento es armónico, como indica presencia de funciones sinusoidales, pero la amplitud (la *envolvente* del movimiento oscilatorio) decrece exponencialmente, por lo que transcurrido un tiempo el péndulo ha vuelto a su posición de equilibrio.

En el programa de FORTRAN 90, se introdujeron valores de los parámetros y las condiciones iniciales de tal forma que el movimiento fuese subamortiguado. Así se introdujeron como condiciones iniciales $\theta_0 = 1,57$ rad. y $\theta'_0 = 0$ rad/s y como valores de la constante de amortiguamiento $k = 0,1$ s⁻¹, y $\omega = \sqrt{g/l} = 1$ rad/s, de donde se puede ver que $k < \sqrt{2\omega}$. El movimiento se muestra en la figura 8, y se puede ver que corresponde a un movimiento subamortiguado.

El espacio de fases, en la figura 9, se puede apreciar una espiral que se va cerrando, como corresponde a un nodo estable en el punto $\theta = 0$, si bien éste sólo se alcanza para $t \rightarrow \infty$.

4. Movimiento amortiguado y forzado

Es el movimiento más general y más realista que puede tener el péndulo, sometido tanto a una fuerza externa como a una fuerza de amortiguamiento. La ecuación diferencial que describe este movimiento es, cuando la fuerza externa es armónica es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = F_0 \cos \omega_0 t. \quad (14)$$

Resolviendo en primer lugar la ecuación homogénea asociada a (14), obtenemos las soluciones que se describen en la sección 3, con las distintas situaciones que en la misma se describen en función de los parámetros g , k , y l . Hay que añadir además una solución particular de tipo armónico, como corresponde al carácter de la fuerza externa, que toma la siguiente forma

$$\theta_p(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (15)$$

donde las constantes A y B se determinan sustituyendo la solución particular en la ecuación diferencial, obteniéndose

$$A = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (k\omega_0)^2}, \quad (16)$$

$$B = \frac{k\omega_0 F_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (k\omega_0)^2}. \quad (17)$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación (14) consta de una parte correspondiente a la solución homogénea que decae exponencialmente con el tiempo, como se puede ver en la sección 3, $\theta_h(t) \propto e^{-Ct}$; y una parte armónica correspondiente a la solución particular (ecuación (15)). Transcurrido cierto tiempo, la solución homogénea se habrá hecho despreciable frente a la solución particular, por lo que se las denomina *solución transitoria* y *solución estacionaria* respectivamente. Después de cierto tiempo, únicamente prevalece la parte armónica de la solución, la solución estacionaria.

Introduciendo las condiciones adecuadas en nuestro programa de FORTRAN 90, podemos apreciar este hecho. Observando la figura 10, podemos ver como en los aproximadamente 20 primeros segundos del movimiento, la parte exponencial de la solución es apreciable, y cómo se hace menos patente a medida que transcurre el tiempo.

Si observamos el espacio de fases en la figura 11, podemos ver cómo mientras la parte transitoria de la solución es relevante, el movimiento es impredecible, y no sigue ningún tipo de tendencia. A medida que el tiempo se hace mayor, la velocidad angular tiende asintóticamente a una elipse, que corresponde a la solución armónica estacionaria.

Este fenómeno se puede apreciar también en las figuras 12 y 13, para otras condiciones iniciales y valores de los parámetros.

5. Código fuente

A continuación se muestra el código fuente del programa empleado para la resolución numérica de la ecuación del péndulo.

```
program EDO

real, parameter:: pi=3.1415926
real:: g0, l, theta0, theta10, h
real::n, t, theta, theta1, F0, omegaf, k !,Amp
real::a, b

integer::mov

character (len=11), fichero

g0=9.8
l=0.5
theta0=pi/4
theta10=0
h=0.02
a=0
b=4
omegaf=2

print*, 'Programa para calcular resolver la ecuación diferencial del péndulo'
pause
print*, ' '
print*, 'Selecciona el tipo de movimiento:'
print*, ' '
print*, '(1) Armonico simple, k=0, F0=0'
```

```

print*, '      Condiciones iniciales y parametros:'
print*, '      * Aceleracion de la gravedad: g=9.8 m/s^2.'
print*, '      * Longitud del pendulo: 0.5 m.'
print*, '      * Angulo inicial: pi/4 rad.'
print*, '      * Velocidad angular inicial: 0 rad/s.'
print*, '      * Intervalo de tiempo: 4 s.'
print*, '      * Paso: 0.02 s.'
print*, ' '

print*, '(2) Amortiguado y Forzado'
print*, '      Condiciones iniciales y parametros:'
print*, '      * Aceleracion de la gravedad: g=9.8 m/s^2.'
print*, '      * Longitud del pendulo: l=9.8 m.'
print*, '      * Angulo inicial: 0.333 rad.'
print*, '      * Velocidad angular inicial: 0.1 rad/s.'
print*, '      * Intervalo de tiempo: 400 s.'
print*, '      * Paso: 0.1 s.'
print*, '      * Constante de Amortiguamiento: k=0.2 N/m'
print*, '      * Amplitud de la Fuerza externa: 1.25 N.'
print*, '      * Frecuencia de la Fuerza externa: 0.3 rad/s.'
print*, ' '

print*, '(3) Movimiento personalizado'
print*, ' '

read*, mov

if (mov==1) then
k=0
F0=0
print*, 'Has seleccionado Movimiento Armónico Simple'
pause
end if

if (mov==2) then
k=0.2
F0=1.25
omegaf=0.3
l=9.8
theta0=0.333
theta1=0.1
a=0
b=400
h=0.1
print*, 'Has seleccionado Movimiento Amortiguado y Forzado'
pause
end if

if (mov==3) then
print*, 'Has seleccionado Movimiento Personalizado'
print*, ' '
print*, 'Introduce el valor de las siguientes condiciones iniciales y parametros'
print*, 'Aceleracion de la gravedad, g0'
read*, g0

```

```

print*, 'Longitud del pendulo, l'
read*, l
print*, 'Angulo inicial, theta0'
read*, theta0
print*, 'Velocidad angular inicial, theta10'
read*, theta10
print*, 'Tiempo inicial, a'
read*, a
print*, 'Tiempo final, b'
read*, b
print*, 'Paso, h'
read*, h
print*, 'Constante de Amortiguamiento, k'
read*, k
print*, 'Amplitud de la Fuerza externa, F0'
read*, F0
print*, 'Frecuencia de la Fuerza externa, omegaf'
read*, omegaf
end if

n=(b-a)/h
t=a
theta=theta0
theta1=theta10
print*, 'Escribe el nombre del fichero de resultados'
read "(A)", fichero

open (1, file=fichero)

do i=1, n

    d11=G(t, theta, theta1)
    d12=F(t, theta, theta1)
    d21=G(t+0.5*h, theta+0.5*h*d11, theta1+0.5*h*d12)
    d22=F(t+0.5*h, theta+0.5*h*d11, theta1+0.5*h*d12)
    d31=G(t+0.5*h, theta+0.5*h*d21, theta1+0.5*h*d22)
    d32=F(t+0.5*h, theta+0.5*h*d21, theta1+0.5*h*d22)
    d41=G(t+h, theta+h*d31, theta1+h*d32)
    d42=F(t+h, theta+h*d31, theta1+h*d32)

    theta=theta+((h/6)*(d11+2*d21+2*d31+d41))
    theta1=theta1+((h/6)*(d12+2*d22+2*d32+d42))

    write (1,*) t, theta, theta1
print*, t, theta, theta1

    t=a+i*h

end do

close (1)

print*, 'Aceleracion de la gravedad, g0'
print*, g0
print*, 'Longitud del pendulo, l'
print*, l
print*, 'Angulo inicial, theta0'

```

```

print*, theta0
print*, 'Velocidad angular inicial, theta10'
print*, theta10
print*, 'Tiempo inicial, a'
print*, a
print*, 'Tiempo final, b'
print*, b
print*, 'Paso, h'
print*, h
print*, 'Constante de Amortiguamiento, k'
print*, k
print*, 'Amplitud de la Fuerza externa, F0'
print*, F0
print*, 'Frecuencia de la Fuerza externa, omegaf'
print*, omegaf

contains

function F(t, theta, theta1)
real::t, theta, theta1, F
F=((F0*cos(omegaf*t))-(k*theta1)-((g0/l)*theta)) !Amp
end function

function G(t, theta, theta1)
real::t, theta, theta1, G
G=theta1
end function

end program

```

6. Conclusiones

Mediante un programa escrito en FORTRAN 90, hemos resuelto numéricamente la ecuación de un péndulo para pequeñas oscilaciones, lo cual nos ha permitido interpretar los resultados obtenidos comparándolos con las soluciones analíticas del problema. Mediante métodos numéricos sería posible resolver el movimiento del péndulo sin la aproximación de pequeñas oscilaciones, no resoluble analíticamente, lo cual nos da una idea de la importancia de los métodos numéricos en programación para múltiples problemas físicos, no solo por la facilidad y rapidez, sino porque nos permite obtener soluciones suficientemente aceptables para problemas analíticamente irresolubles.

Bibliografía

- “Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones de Frontera”. C.H. Edwards, Jr. David E. Penney. Prentice Hall.
- “Mecánica Clásica”. H. Goldstein. Editorial Reverté.
- “Física. Volumen 1”. Paul. A. Tipler. Editorial Reverté.

Índice de figuras

1.	Movimiento armónico simple	11
2.	Movimiento armónico simple. Espacio de fases.	12
3.	Solución numérica al péndulo forzado no amortiguado. Pulsaciones.	13
4.	Espacio de fases para el movimiento forzado no amortiguado. Pulsaciones.	14
5.	Imagen del puente de Tacoma-Narrows oscilando.	15
6.	Movimiento del péndulo sometido a una fuerza externa. Resonancia.	16
7.	Espacio de fases para el movimiento del péndulo forzado no amortiguado. Resonancia.	17
8.	Movimiento de un péndulo subamortiguado.	18
9.	Espacio de fases para el movimiento del péndulo subamortiguado.	19
10.	Movimiento amortiguado y forzado. (A)	20
11.	Espacio de fases para el movimiento armónico amortiguado. (A)	21
12.	Movimiento amortiguado y forzado. (B)	22
13.	Espacio de fases para el movimiento amortiguado y forzado. (B)	23

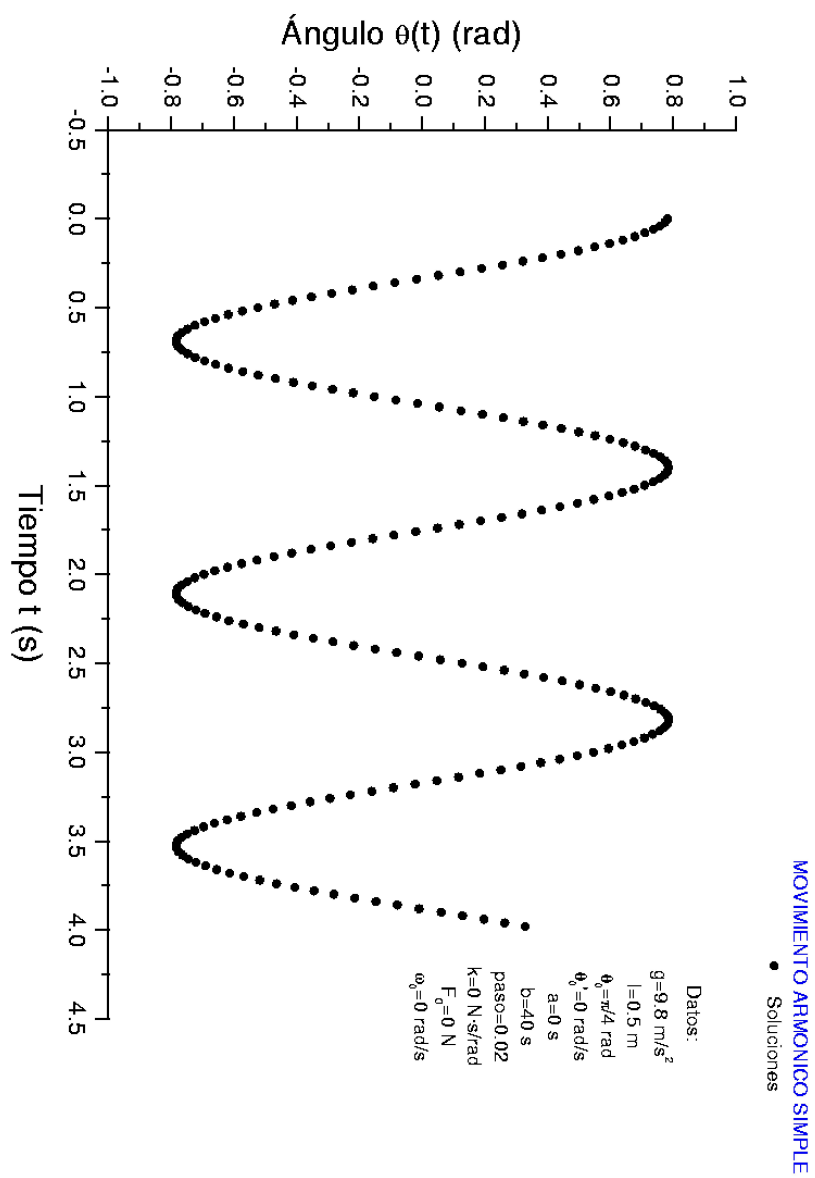


Figura 1: Movimiento armónico simple

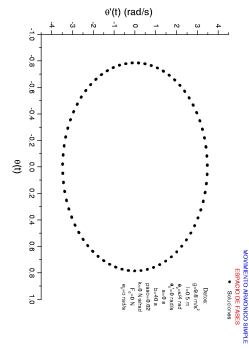


Figura 2: Movimiento armónico simple. Espacio de fases.

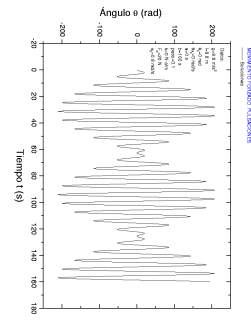


Figura 3: Solución numérica al péndulo forzado no amortiguado. Pulsaciones.

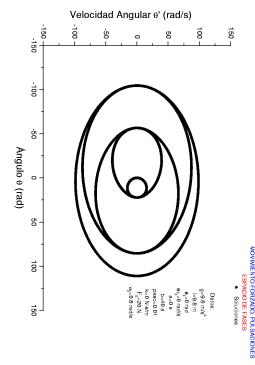


Figura 4: Espacio de fases para el movimiento forzado no amortiguado. Pulsaciones.

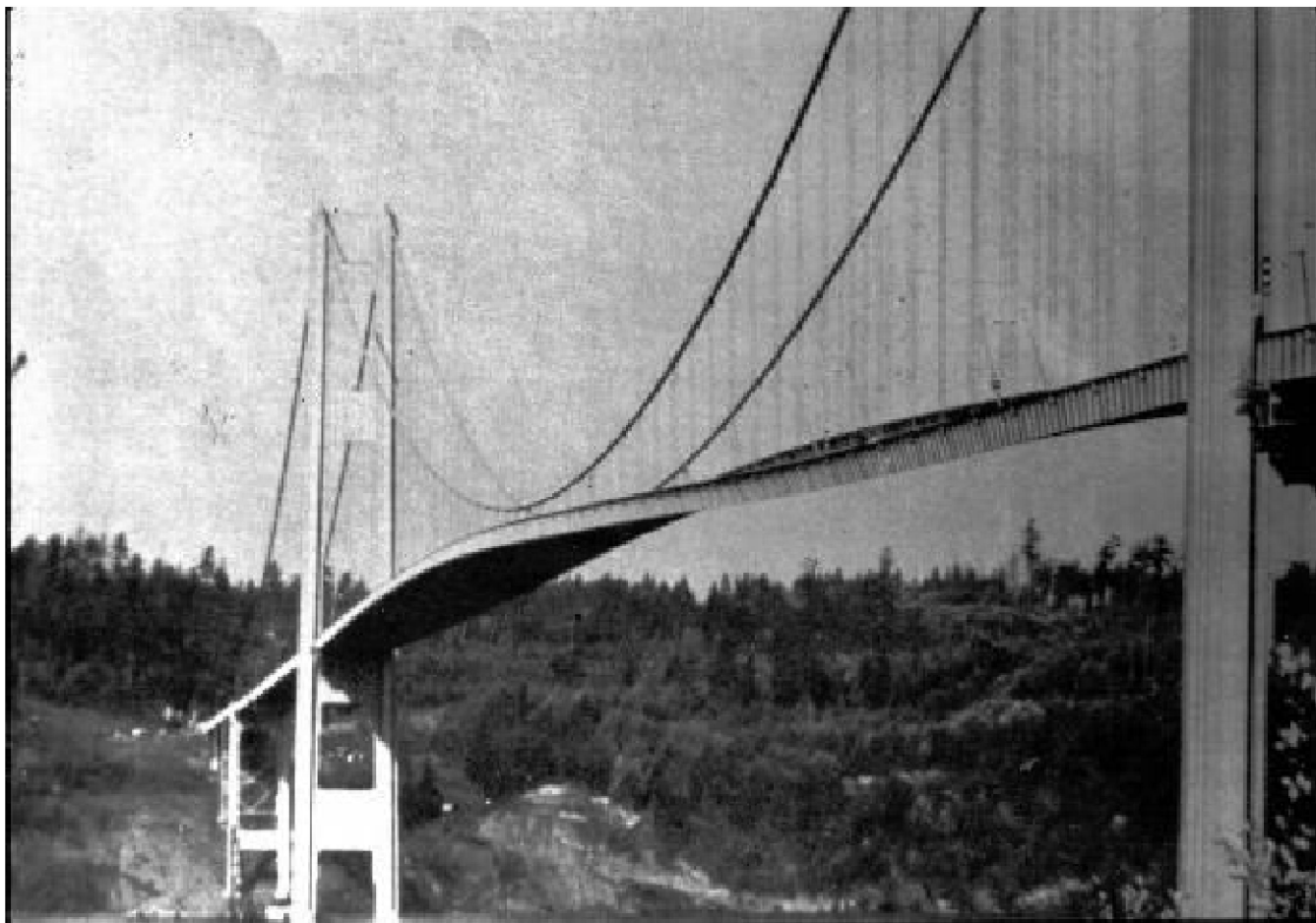


Figura 5: Imagen del puente de Tacoma-Narrows oscilando.

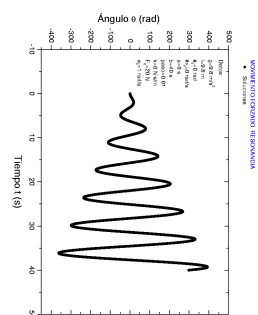


Figura 6: Movimiento del péndulo sometido a una fuerza externa. Resonancia.



Figura 7: Espacio de fases para el movimiento del péndulo forzado no amortiguado. Resonancia.

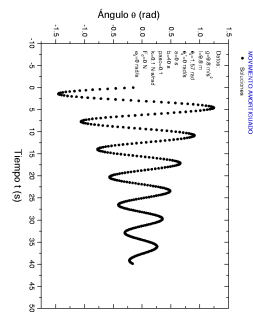


Figura 8: Movimiento de un péndulo subamortiguado.

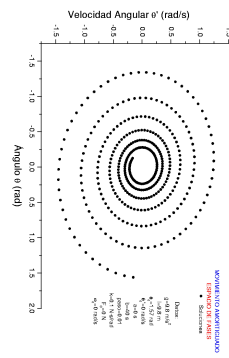


Figura 9: Espacio de fases para el movimiento del péndulo subamortiguado.

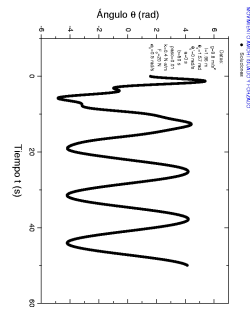


Figura 10: Movimiento amortiguado y forzado. (A)

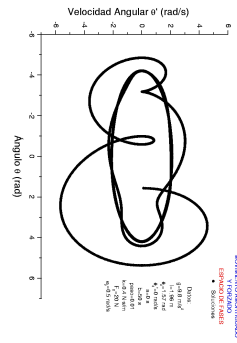
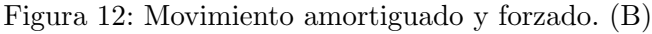


Figura 11: Espacio de fases para el movimiento armónico amortiguado. (A)



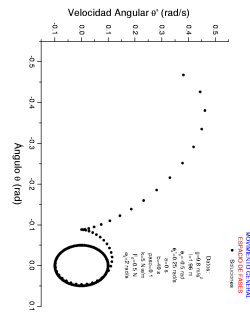


Figura 13: Espacio de fases para el movimiento amortiguado y forzado. (B)