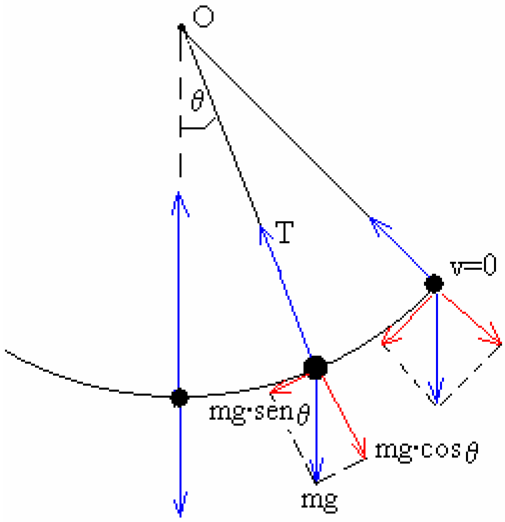
Galileo y el péndulo

1. Introducción teórica

Péndulo simple



En un péndulo simple de longitud L se llega a la siguiente ecuación:

$$\left.\begin{matrix} s = L\theta \\ m\dfrac{d^2 s}{dt^2} \end{matrix}\right\} mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin(\theta) \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

Donde s es el arco de círculo que recorre el péndulo, en el caso de que las oscilaciones sean pequeñas se puede realizar la siguiente aproximación:

$$\sin(\theta) \approx \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \rightarrow \theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

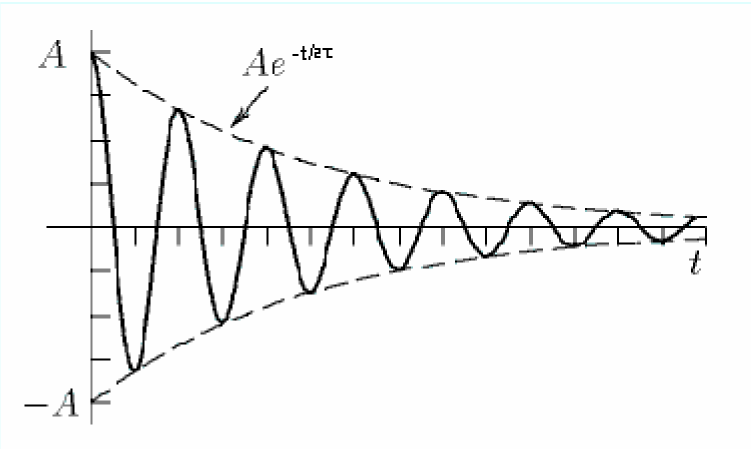
De donde se puede obtener fácilmente la expresión del periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, en el caso de que las oscilaciones no sean pequeñas hay que resolver una integral elíptica de primera especie: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\varphi)}}\right) \approx \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\ldots\right)$

donde $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

El factor de calidad Q

En el caso anterior del péndulo simple no se ha considerado el rozamiento con el aire, al considerarse el rozamiento el movimiento del péndulo se convierte en un movimiento débilmente amortiguado, en tal caso se obtiene la siguiente expresión:

$$x = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega_0 t + \theta_0) \rightarrow |v| \approx A_0\omega_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin(\omega_0 t + \theta_0)$$



En este tipo de sistemas se define el factor de calidad como:

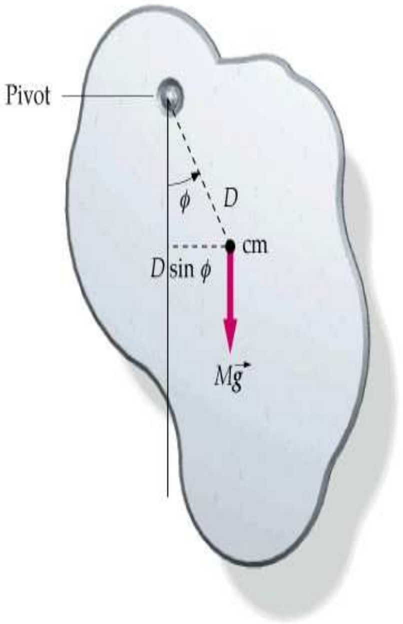
$$Q = 2\pi\frac{\textit{energía almacenada en un ciclo}}{\textit{energía perdida en un ciclo}}$$

Debido a que es un sistema débilmente amortiguado el factor de calidad se puede aproximar de la siguiente manera: $Q \approx \omega_0\tau$, donde τ es el tiempo de relajación del sistema o constante temporal del sistema(es el tiempo en el que la energía del sistema disminuye en un factor e)

El péndulo físico

Un sólido rígido colgado de un punto diferente a su centro de gravedad constituye un péndulo físico.

$$\tau = \frac{dL}{dt} \;,\; L = I\omega \;,\; \tau = -M\,g\,D\sin\phi \rightarrow I\alpha = I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -MgD\sin\phi$$



Considerando oscilaciones pequeñas se obtiene:

$\phi = \phi_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ Donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgD}{I}}$

2. Desarrollo experimental

Péndulo simple

En este parte de la práctica se realizan medidas del periodo de un péndulo simple para ángulos grandes, desde 30º hasta 14º de dos en dos. Se repite el mismo procedimiento para los ángulos negativos para corregir el error de cero y se obtiene el valor del período promedio a partir de: $T = \frac{T_+ + T_-}{2}$. Se realiza el siguiente ajuste por mínimos cuadrados para determinar el valor de la aceleración de la gravedad:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \rightarrow \left\{\begin{matrix} y = T \\ x = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\end{matrix}\right\} \rightarrow y = ax + b$$

Tabla 1

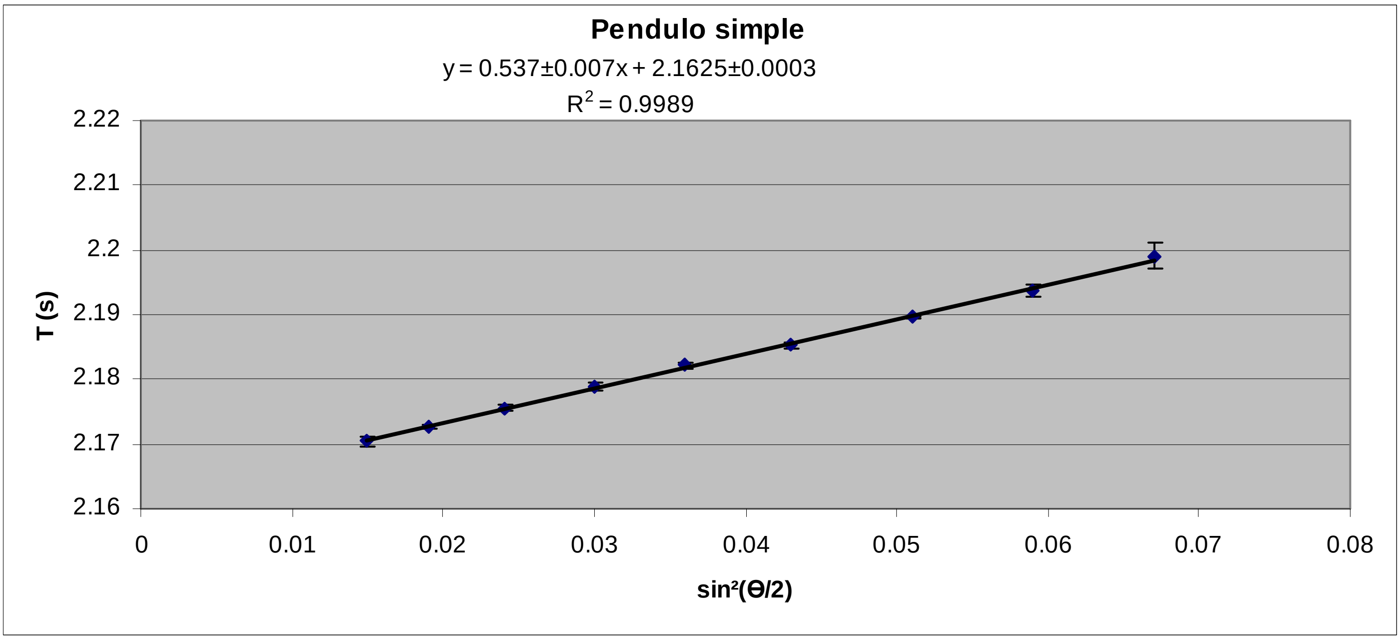
$\theta \pm 1^{\circ}$	$T_1 \pm 0.000001$ (s)	$T_2 \pm 0.000001$ (s)	$T_3 \pm 0.000001$ (s)	$\overline{T}$ (s)	$\sigma_{\overline{T}}$ (s)
30	2.196842	2.199056	2.199774	2.1986	0.0015
28	2.194634	2.193836	2.192962	2.1938	0.0008
26	2.189178	2.189666	2.189524	2.1895	0.0002
24	2.185188	2.184716	2.185382	2.1851	0.0003
22	2.182432	2.182422	2.182374	2.18241	0.00003
20	2.178796	2.179152	2.178914	2.1790	0.0002
18	2.175284	2.175824	2.176000	2.1757	0.0004
16	2.172998	2.173038	2.172992	2.17301	0.00002
14	2.170818	2.170198	2.170158	2.1704	0.0003
-30	2.197832	2.198300	2.199958	2.1987	0.0011
-28	2.193344	2.193518	2.194360	2.1937	0.0005

-26	2.18958	2.18981	2.189524	2.18964	0.00014
-24	2.185592	2.185876	2.185064	2.1855	0.0004
-22	2.182656	2.181592	2.181892	2.1820	0.0005
-20	2.17824	2.179348	2.17865	2.1787	0.0006
-18	2.175276	2.175672	2.175542	2.1755	0.0002
-16	2.172058	2.172708	2.172182	2.1723	0.0003
-14	2.170346	2.169696	2.17083	2.1703	0.0006

$L = 116 \pm 2cm$

A partir de la Tabla 1 se obtiene los siguientes valores para hacer el ajuste por mínimos cuadrados:

T_{+-} (s)	$\sigma_{T_{+-}}$ (s)	$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\sigma_{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
2.199	0.002	0.250	0.004
2.1938	0.0009	0.220	0.004
2.1896	0.0002	0.192	0.004
2.1853	0.0005	0.165	0.004
2.1822	0.0005	0.140	0.003
2.1789	0.0006	0.117	0.003
2.1756	0.0004	0.095	0.003
2.1727	0.0003	0.076	0.002
2.1704	0.0007	0.059	0.002

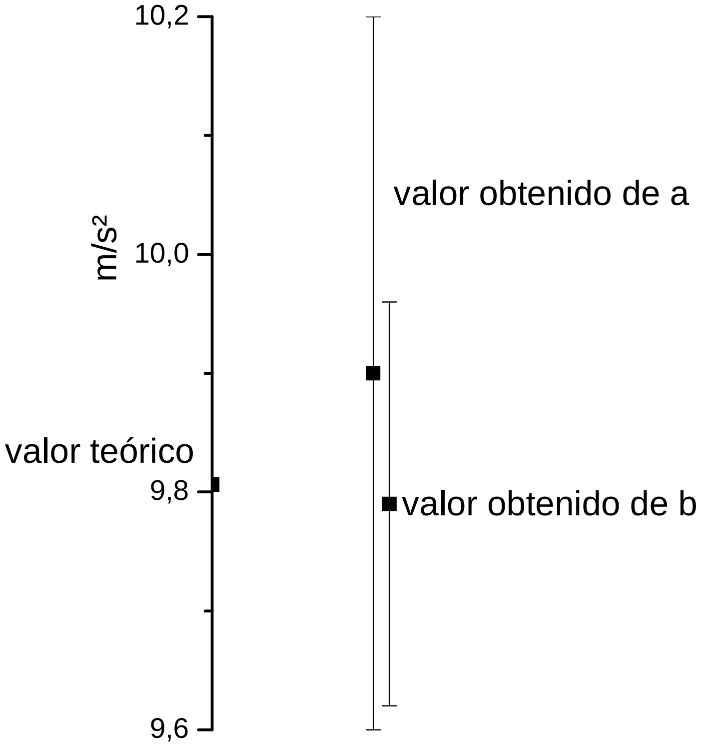


$$a = 0.537 \pm 0.007 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g_a = \frac{\pi^2}{4a^2}L = 9.9 \pm 0.3 m/s^2$$

$$\sigma_{g_a} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4a^2}\sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 L}{2a^3}\sigma_a\right)^2} = 0.3 m/s^2$$

$$b = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g_b = \frac{4\pi^2}{b^2}L = 9.79 \pm 0.17 m/s^2$$

$$\sigma_{g_b} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{b^2}\sigma_L\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{b^3}\sigma_b\right)^2} \cong 0.17 m/s^2$$



¿Cómo varía el período del péndulo si se dobla su longitud? ¿Y si se dobla su masa?

$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$ Si se dobla la longitud el periodo aumenta en un factor $\sqrt{2}$. La masa no afecta al periodo del péndulo por lo tanto doblar su masa no modificara su periodo.

Si un reloj de péndulo de la tierra se llevara a la luna, ¿se adelantaría o atrasaría?

Como el campo gravitatorio de la luna en su superficie es menor que el campo gravitatorio en la tierra el periodo del péndulo seria mayor y por tanto se atrasaría.

Determinación de Q

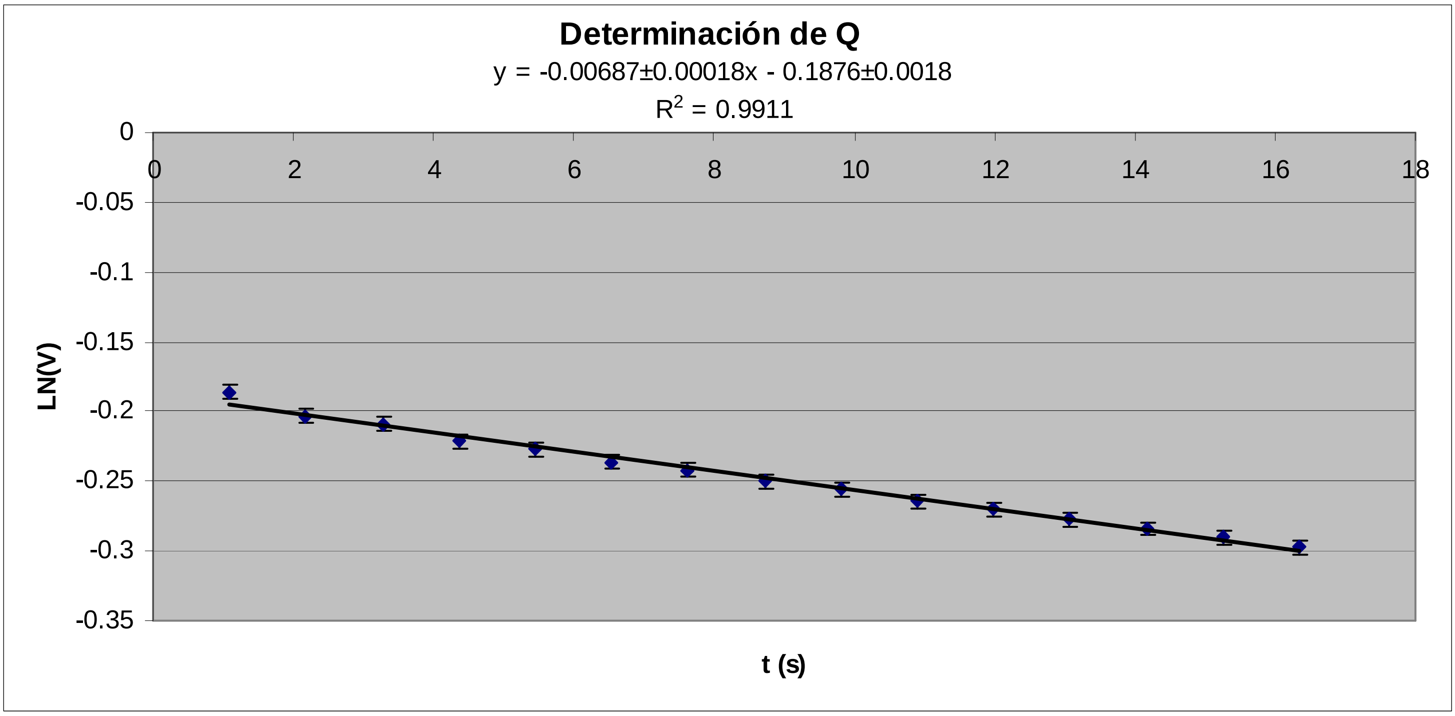
En esta parte de la practica se suelta el péndulo desde un ángulo de 20º y se calcula el tiempo que tarda en atravesar la fotocélula el péndulo, a partir de estas medidas y conociendo el diámetro del péndulo $\phi = 20.0 \pm 0.1mm$ se puede calcular su velocidad. Tomando el origen de tiempo cuando el péndulo pasa por primera vez por el detector, la segunda ve como t = T/2 (así hasta la n-essima vez t = (n-1)T/2) se puede obtener una tabla de la velocidad frente a tiempo, en concreto el detector es capaz de recordar 16 medidas por lo tanto tendremos una tabla con 16 valores. Además teniendo en cuenta que: $|\sin(\omega t + \theta_0)| = |\sin(\omega nT/2 + \theta_0)| = constante$, la ecuación del módulo de la velocidad queda: $v = B_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \rightarrow \ln(v) = -\frac{t}{2\tau} + \ln(B_0)$, ajustando por mínimos cuadrados se obtiene el valor de τ y a partir del periodo para 20º de la tabla 1 se obtiene ω_0 y usando $Q \approx \omega_0 \tau$ se obtiene el factor de cualidad.

Tabla 2

n	T (s)	V (m/s)	$\sigma_v (m/s)$
1	0.023560	0.849	0.004
2	0.024104	0.830	0.004
3	0.024508	0.816	0.004
4	0.024672	0.811	0.004
5	0.024944	0.802	0.004
6	0.025100	0.797	0.004
7	0.025310	0.790	0.004
8	0.025488	0.785	0.004
9	0.025664	0.779	0.004
10	0.025840	0.774	0.004
11	0.026030	0.768	0.004
12	0.026198	0.763	0.004
13	0.026372	0.758	0.004
14	0.026554	0.753	0.004
15	0.026730	0.748	0.004
16	0.026936	0.743	0.004

ln(v)	$\sigma_{\ln(v)}$	t (s)	σ_t (s)
-0.164	0.005	0	0
-0.186	0.005	1.0895	0.0003
-0.203	0.005	2.1790	0.0004
-0.209	0.005	3.2685	0.0005
-0.221	0.005	4.3580	0.0006
-0.227	0.005	5.4475	0.0007
-0.236	0.005	6.5370	0.0008
-0.242	0.005	7.6265	0.0009
-0.25	0.005	8.7160	0.0009
-0.256	0.005	9.8055	0.0009
-0.264	0.005	10.895	0.0009
-0.27	0.005	11.9845	0.0009
-0.277	0.005	13.0740	0.0009
-0.284	0.005	14.1635	0.0009

-0.29	0.005	15.253	0.0009
-0.297	0.005	16.3425	0.0009



¿Cuánto vale τ ?

$$-\frac{1}{2\tau} = a \rightarrow \tau = -\frac{1}{2a} = 72.8 \pm 1.9s$$

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_a}{2a^2} = 1.9(s)$$

¿Qué significado físico tiene este valor?

Es el intervalo de tiempo en el cual el sistema reduce un factor e su energía

¿Este péndulo será un buen o un mal sistema oscilante?

$$Q \approx \omega\tau = 2\pi f\tau = 997 \pm 26rad$$

$$\sigma_Q = 2\pi\sqrt{(\tau\sigma_f)^2 + (f\sigma_\tau)^2} \cong 26rad$$

$\frac{E}{\Delta E} = \frac{Q}{2\pi} = 159 \pm 4 \rightarrow \frac{\Delta E}{E} = 0.00629 \pm 0.00016$ En cada ciclo pierde 0.629% de la energía, el péndulo tardaría 159 ciclos en perder toda su energía.

¿Qué factores contribuyen en mayor medida a la pérdida de energía del sistema?

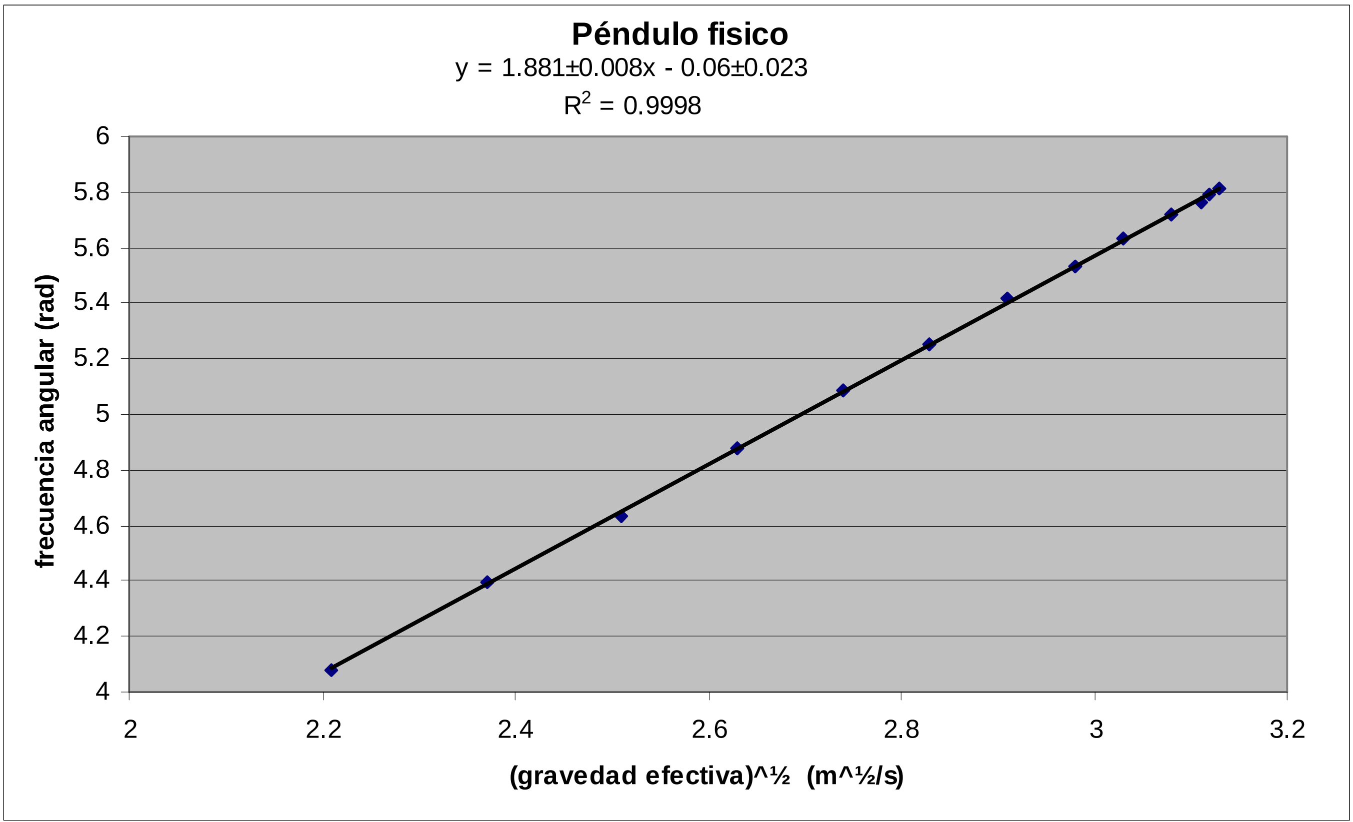
El principal factor es el rozamiento con el aire.

Péndulo Físico

En esta parte se utiliza un péndulo físico que permite variar su orientación de forma que cambia su plano de oscilación del péndulo de forma que el valor efectivo de la aceleración de la gravedad varié $g_{ef} = g\cos(\varphi)$ tomando la formula para la frecuencia angular de la introducción teórica, la frecuencia angular queda: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg_{ef}D}{I}}$ con la cual calcularemos el momento de inercia del péndulo a partir de un ajuste de mínimos cuadrados.

$\varphi \pm 1^o$	$T_1 \pm 0.000001$ (s)	$T_2 \pm 0.000001$ (s)	$T_3 \pm 0.000001$ (s)	$\overline{T}$ (s)	$\sigma_{\overline{T}}$ (s)
0	1.080952	1.080394	1.080922	1.0808	0.0003
5	1.085408	1.084766	1.084068	1.0847	0.0007
10	1.090840	1.089944	1.089832	1.0902	0.0005
15	1.099076	1.099152	1.099490	1.0992	0.0002
20	1.114776	1.115246	1.115542	1.1152	0.0004
25	1.135500	1.135074	1.135076	1.1352	0.0002
30	1.160064	1.160560	1.160798	1.1605	0.0004
35	1.196208	1.196024	1.196060	1.19610	0.00009
40	1.235606	1.236664	1.233960	1.2354	0.0014
45	1.286700	1.288576	1.288088	1.2878	0.0009
50	1.356738	1.355988	1.353299	1.3553	0.0017
55	1.425166	1.430772	1.433060	1.430	0.004
60	1.542752	1.541380	1.539526	1.54122	0.0016

$\varphi \pm 1^o$	ω rad	σ_ω rad	$\sqrt{g_{ef}}$ $m^{1/2}/s$	$\sigma_{\sqrt{g_{ef}}}$ $m^{1/2}/s$
0	5.8135	0.0016	3.13	0.03
5	5.7926	0.0037	3.12	0.03
10	5.7633	0.0026	3.11	0.03
15	5.7161	0.0010	3.08	0.03
20	5.634	0.002	3.03	0.03
25	5.5349	0.0010	2.98	0.03
30	5.4142	0.0019	2.91	0.03
35	5.2531	0.0004	2.83	0.03
40	5.086	0.006	2.74	0.03
45	4.879	0.003	2.63	0.03
50	4.636	0.006	2.51	0.03
55	4.394	0.012	2.37	0.04
60	4.077	0.004	2.21	0.04



Debido a la dificultad para pesar la varilla del péndulo y que su masa es despreciable respecto a la masa de la pesa, el centro de masas estará donde el centro de masas de la pesa.

$D = distancia\ al\ CM = 308 \pm 1mm$ (Respecto al punto de sujeción del péndulo)

$$m_{pesa} = 110 \pm 1g$$

$$y = ax + b \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mD}{I}}\sqrt{g_{ef}} \rightarrow a = \sqrt{\frac{mD}{I}} \rightarrow I = \frac{mD}{a^2} = 0.010 \pm 0.003kgm^2$$

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{D}{a^2}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{m}{a^2}\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{mD}{a^3}\sigma_a\right)^2} = 0.003kgm^2$$

Momento de inercia teórico:

$$I = m * L_{barilla}^2 = 0.0104 \pm 0.0002kgm^2$$

$$\sigma_I = \sqrt{\left(L_{barilla}^2\sigma_m\right)^2 + \left(2mL_{barilla}\sigma_L\right)^2} = 0.0002kgm^2$$

Comparación teórico con el experimental

$$I_{Teorico} - I_{experimental} = 0.000 \pm 0.003kgm^2$$

Conclusiones

En esta práctica se ha calculado el valor de la gravedad a partir del péndulo simple disponible en el laboratorio dando unos resultados bastante aproximativos (el valor que se considera correcto esta dentro del margen de error). Además se ha calculado el factor de cualidad de dicho péndulo. En la última parte se ha calculado tanto teóricamente como experimentalmente el valor del momento de inercia de un péndulo físico dando en los dos casos valores similares compatibles con sus errores.

Imágenes:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/
http://es.wikipedia.org/wiki/Portada