FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

MÁSTER EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ASIGNATURA:
MOVILIDAD Y DINÁMICA CELULAR: INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA Y CRECIMIENTO TUMORAL

Estudio de la expansión de civilizaciones galácticas mediante ecuaciones de reacción-difusión no lineales

Autor:
José Adrián Castelo Martínez

Profesores:
Juan Soler Vizcaíno
Juan Calvo Yagüe

Enero de 2018

Resumen

En este trabajo revisaremos el artículo de Sagan y Newman "*Galactic civilizations: populations dynamics and interstellar diffusion*" [1]. Estudiaremos modelos de crecimiento de especies y de difusión aplicada a la dispersión de éstas. Se supondrá que todas las civilizaciones deben supeditar su crecimiento a la capacidad de albergar población de su planeta, y veremos que un modelo de difusión con el coeficiente de difusión dependiendo explícitamente de la población nos permite reproducir las características básicas esperadas en movimientos migratorios de especies. Estudiaremos sobre todo dos modelos: un primer modelo en el cual la población no sufre crecimiento neto (ZPG, *zero population growth*) y un segundo en el cual se tienen efectos de crecimiento y saturación locales, en el que encontraremos soluciones de ondas viajeras. En ambos modelos el frente de colonización se expande lenta y uniformemente, ya que las expediciones de aventureros coloniales partirán del frente de colonización. Encontraremos que el tiempo de vida de la civilización avanzada; expandiéndose por difusión y con crecimiento local, más próxima debe ser del orden de $10^5 \sim 10^7$ años para poder alcanzar nuestro planeta, y mayor que la edad del universo si practican ZPG. Esto nos lleva a concluir que la ausencia de visitas en la Tierra puede explicarse bajo estos supuestos.

Índice

Introducción

"*Where are they?*" es la archiconocida frase, atribuída al físico italiano Enrico Fermi, aludiendo al hecho de que aun no tengamos noticia de otras civilizaciones avanzadas en nuestro universo. En nuestra galaxia hay del orden de $\sim 10^{11}$ estrellas, la mayoría con planetas orbitando y muchos con varios de ellos en la zona de habitabilidad (rango de distancias a la estrella que permiten que el agua esté en estado líquido). El desarrollo de inteligencia y tecnología parece una ventaja evolutiva obvia independientemente del medio[1], nos preguntamos: ¿cómo es que aun no hemos detectado señales de inteligencia extraterrestre? Podríamos reformular esta pregunta en un contexto astrofísico incluso: civilizaciones más avanzadas que la nuestra (milenios o incluso millones de años) podrían ser capaces de manipular objetos y fuentes de energía a escalas cósmicas. ¿Puede ser que algún fenómeno astrofísico que observamos hoy día no sea sino un reflejo de uno de estos objetos? (por ejemplo, la archiconocida esfera de Dyson [2]) O quizá podamos pensar lo contrario: la ausencia de tales fenómenos implica la no existencia de civilizaciones más avanzadas. Pero aparte de que de hecho hay una serie de fenómenos astrofísicos pobremente entendidos, podemos pensar que reconocer un fenómeno como tecnología de una civilización más avanzada debe ser tan difícil como que una hormiga entienda los artefactos humanos. Citando la tercera ley de Arthur C. Clarke, "*any sufficiently advanced technology is indistinguishable from magic*".

Incluso los humanos hemos demostrado ser capaces de realizar modestas exploraciones interestelares, como por ejemplo con las sondas *Pioneers* 10 y 11 y las *Voyagers* 1 y 2, aunque con velocidades pequeñas, del orden de $\sim 10^{-4}\,\mathrm{pc\,year}^{-1}$. ¿No debería entonces una civilización algo más avanzada ser capaz de mucho más? En tal caso, ¿por qué no tenemos evidencia en la Tierra de visitas interestelares? Intentos serios de considerar tales visitas no encuentran evidencia persuasiva en artefactos históricos, mitos antiguos o visitas de OVNIS, encontrándose siempre una explicación más plausible.

Se podría pensar que si la existencia de civilizaciones extraterrestres implicara las visitas a la Tierra, la ausencia de tales visitas implicaría la ausencia de tales civilizaciones. Fijémonos que, a pesar de las dificultades que podrían haber para viajes interestelares a velocidades cercanas a la de la luz (tales como flujo de rayos cósmicos inducido), no debería haber problema para viajes interestelares a velocidades más modestas, como $0.1c$. Dado que la Vía Láctea tiene un diámetro de $\sim 10^5\,\mathrm{ly}$, una nave a tal velocidad la cruzaría en menos de un millón de años. Por otro lado, podríamos objetar que viajes interestelares a gran escala podrían ser improbables por otros motivos, tales como la pérdida de motivación de una civilización o la autodestrucción. Pero tales objeciones no parecen válidas, dado que deberían aplicar a *todas* las civilizaciones avanzadas para explicar la ausencia de visitas. Más adelante veremos que

[1] Aunque en la Tierra hoy día solo una especie presenta desarrollo tecnológico, pero podríamos pensar que esto es por competencia, tal como la que pudo ocurrir entre neanderthales y homo sapiens.

distinguir a las civilizaciones por tiempo de vida puede ser útil para poder teorizar acerca de sus motivos.

Sagan y Newman consideran que los argumentos anteriormente comentados son defectuosos. Por un lado, deberían haber impedimentos sociales universales al imperialismo cósmico de un tipo que aplicaran a todas las civilizaciones galácticas. Toda sociedad que desee evitar la superpoblación y por tanto la escasez de recursos debe practicar un estricto control de natalidad manteniendo valores bajos de γ (secciones 1 y 3). En el límite, debemos considerar que las poblaciones pasen por un periodo de ZPG (*zero population growth*, sección 2), y posteriormente se mantengan a bajos valores de γ.

Podríamos imaginar también que los motivos puedan cambiar para una sociedad más avanzada tecnológicamente. Usualmente el problema de los viajes interestelares solo se enfoca extrapolando a que en el futuro podremos viajar a mayores velocidades. Pero imaginemos lo siguiente: que una civilización avanzada desarrolla la tecnología necesaria para evitar envejecer; es decir, consigue la inmortalidad. Si suponemos como se cree que el envejicimiento se debe a acumulaciones de mutaciones somáticas[2], parece pausible pensar que una sociedad avanzada será capaz de evitar tanto el envejecimiento como la enfermedad. El fallecimiento de los individuos de tal sociedad quedaría relegado a desafortunados accidentes. Motivaciones para embarcarse en un viaje interestelar que nosotros consideramos razonables desde nuestro punto de vista actual pueden no serlo para tal sociedad, pues ¿hasta qué punto no es nuestra motivación por el viaje interestelar un deseo humano por dejar huella? Una sociedad de individuos inmortales debería practicar un control de la natalidad mucho más estricto, y quiza el viaje interestelar (con los peligros que conlleve respecto a no desplazarse del planeta natal) no sea una buena idea. Podríamos imaginar incluso que, de ser tales conductas heredables (el que un individuo sea más o menos aventurero, etc), la evolución a lo largo de millones de años primaría en tal sociedad a los individuos menos predispuestos a afrontar peligros. Se cree que la evolución ha eliminado en parte el territorialismo en los humanos. Parece lógico que un fuerte sentimiento de territorialismo sea indeseable a partir del desarrollo de armas de destrucción masiva por parte de una civilización. Civilizaciones suficientemente antiguas para que la selección natural haya operado tras ello, o aquellas capaces de modificar su propia evolución, podrían querer reducir el instinto que seres menos avanzados tecnológicamente muestran al territorialismo.

Es claramente imposible pronosticar comportamientos ético-morales para sociedades distintas a la nuestra, sean más avanzadas o no. Pero el párrafo anterior muestra una serie de ideas menos aparentes que desde la lógica humana son impedimentos a los viajes interestelares.

Un punto crucial es conocer la velocidad de avance del frente de colonización. Salvo que una civilización busque ir a un planeta determinado, es más probable que el frente formado por los planetas más alejados del planeta madre se vaya expandiendo

[2]Aquí estamos extrapolando que la vida extraterrestre sea tal y como la nuestra, y las leyes genéticas universales al igual que las físicas.

conforme los recursos en cada planeta escaseen al crecer la población, o simplemente por interes en explorar nuevos mundos. Por ejemplo , el frente de la colonización por parte de una civilización avanzada podría desplazarse a velocidades de un tercio de la velocidad de una nave individual de tal civilización; $v \sim \frac{1}{3} v_s$. Si comparamos esto con la historia humana, vemos que *nunca* ha ocurrido tal cosa (v.g., la construcción de Roma se prolongó durante muchos años, mientras que puede cruzarse a pie en pocas horas luego para Roma, $v/v_s \sim 10^{-6}$).

Otro aspecto a tener en cuenta que podemos extraer de nuestra historia es que las aventuras exploracionales no son promovidas por una única sociedad, sino por sucesivas colonias de descendientes de una civilización padre. Por poner un ejemplo, los fenicios se aventuraron al mar y se establecieron en Cartago, los cartagineses llegando a costas ibéricas, los españoles descubriendo américa y los americanos aventurandose al espacio. Desde este punto de vista podemos considerar la exploración espacial como un quinto orden de la exploración iniciada por los fenicios. Fijémonos que tras una aventura exploratoria, la colonia descendiente se asienta y presenta un periodo de madurez tecnnológico hasta que inicia una nueva aventura exploratoria, periodo durante el cual la civilización padre suele declinar (mismamente vemos que hoy día España no tiene programas espaciales tales como los de América). Sagan y Newman intentan estimar este periodo de madurez que parece necesario (sección 4).

Un enfoque interesante que será comentado en el trabajo es el de Jones ([3], [4]): mediante análisis numérico por Monte Carlo, aun permitiendo que haya un periodo de madurez tras la colonización, no consigue que la velocidad del frente de colonización baje del orden de la décima parte de la velocidad de las naves individuales (una potencia expansionista conquistaría en tal caso la galaxia en diez millones de años si $v_s \sim c$). Para Jones, la colonización se muestra como una válvula de escape a la superpoblación, y por ello el frente de colonización se desplaza a gran velocidad. Veremos que el ratio v/v_s es proporcional al ratio entre el tiempo de viaje interestelar y la suma de tal tiempo más el tiempo de madurez de la colonia hasta que se aventura en un nuevo viaje, lo que nos permitirá ver que los ratios de crecimiento de población para obtener los resultados de Jones son inconsistentes con los dados en la historia de la humanidad.

Nuestro enfoque será el de tratar la expansión colonial de una civilización como un proceso de difusión. Las ecuaciones de difusión han sido ampliamente utilizadas en el estudio de sistemas biológicos, y para problemas tales como la filtración de líquidos por medios porosos, ondas térmicas, etc. Permiten un tratamiento analítico de procesos estocásticos (como veremos, la ecuación de difusión es el límite continuo del movimiento browniano). Tendremos términos de crecimiento en nuestras ecuaciones (proporcionales a la población) y términos de dispersión (difusión, proporcionales a la tasa de cambio de la población). Estudiaremos las propiedades matemáticas de ambos procesos y veremos qué cualidades presentan y porqué parecen deseables a la hora de describir la evolución de una colonización por parte de una civilización avanzada. Con todo, intentaremos deducir las velocidades de los frentes de colonización de civilizaciones avanzadas y su tiempo de vida medio. Este análisis nos puede hacer pensar que la conclusión a la pregunta “*Where are they?*”sea tal vez que no han tenido tiempo de llegar.

1. Crecimiento de la población

La ecuación más sencilla que podríamos intentar utilizar a la hora de describir el crecimiento de una población sería la siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = \gamma\nu \tag{1.1}$$

con ν la cantidad de individuos de una población dada y γ la tasa de crecimiento, es decir, la diferencia entre el número de nacimientos y el número de defunciones. El crecimiento exponencial de una población, como el dado por (1.1), se asocia al nombre de Robert Malthus; conocido por desarrollar la teoría del malthusianismo, según la cual el ritmo de crecimiento de una población responde a una progresión geométrica, mientras que el de los recursos de la población responde a una progresión aritmética, llevando por tanto a la población a un desastre futuro (catástrofe malthusiana) e incluso la extinción de tal especie.

Durante la historia humana, el valor de γ ha ido variando desde $\gamma \sim 5.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{year}^{-1}$ hasta la explosión demográfica a partir de la revolución industrial, situándose en $\gamma \sim 0.02\,\mathrm{year}^{-1}$ (se estima que para tiempos anteriores el valor de γ era aun menor, pudiendo llegar a $\sim 10^{-8}\mathrm{year}^{-1}$). Para hacernos una idea de estos números, integrándo (1.1) y despejando el tiempo:

$$t = \frac{1}{\gamma}\log\left(\frac{\nu(t)}{\nu(0)}\right)$$

Partiendo de un hipótetico inicio con Adan y Eva con tal tasa de crecimiento, solo se tardarían 1098 años en alcanzar los $\sim 7 \cdot 10^9$ habitantes que actualmente posee la Tierra. Es fácil ver que debemos aprender a reducir el valor de γ o causas externas lo harán por nosotros.

Generalicemos (1.1) multiplicando por una función $f(\nu)$

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = \gamma\nu f(\nu)$$

donde $f(\nu)$ es tal que satisface $f(0) = 1$, $\mathrm{d}f(\nu)/\mathrm{d}\nu \leq 0$ y existe ν_s tal que $f(\nu_s) = 0$. ν_s es la población máxima que un medio dado puede albergar, y el decrecimiento de la función $f(\nu)$ refleja el hecho de que un medio puede albergar cada vez menos población, hasta saturarse en ν_s.

Un ejemplo conocido viene dado por

$$f(\nu) = \left(1 - \frac{\nu}{\nu_s}\right)$$

si $0 \leq \nu \leq nu_S$ y cero si $\nu > \nu_S$. La ecuación (1.1) para esta función se conoce como la ley de Pearl-Verhulst o ecuación logística

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = \gamma\nu\left(1 - \frac{\nu}{\nu_s}\right) \tag{1.2}$$

cuya solución es

$$\nu(t) = \frac{\nu(0)\nu_s \mathrm{e}^{\gamma t}}{\nu_s + \nu(0)(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1)} \tag{1.3}$$

Tal curva posee la característica forma de S de una logística. Presenta crecimiento exponencial para $\nu \ll \nu_s$ y saturación asintótica en ν_s. En lo que sigue emplearemos este tipo de crecimiento por presentar la deseable propiedad de saturación.

2. Difusión

En este apartado estudiaremos la dispersión de una población (civilización) suponiendo que se rige por la ecuación de difusión. Veremos las propiedades por tanto de esta ecuación, así como generalizaciones que la harán más deseable para nuestro problema.

2.1. Deducción y propiedades

La ecuación de difusión ha sido ampliamente usada en modelos en biología, tanto para estudios de dispersión (movimientos de individuos de una especie de su lugar de nacimiento a lugares en los que se reproduce y finalmente muere) de poblaciones como para la evolución de un conjunto de macromoléculas en el medio celular. Podemos encontrar a tales movimientos sentido evolutivo: por ejemplo, la dispersión de los individuos de una especie los aleja de sus progenitores y congéneres, reduciendo la probabilidad de tener descendencia con ellos, y por tanto favoreciendo el cruce entre genes distintos. Tal comportamiento es propio por ejemplo de las ratas almizcleras (*Ondatra zibethica L.*), que salvo condicionamientos externos realizan migraciones aleatorias alejándose del lugar de nacimiento.

Como veremos, la ecuación de difusión se puede obtener como límite continuo del movimiento browniano, aleatorio en esencia, por lo que no es de esperar que reproduzca fielmente los comportamientos biológicos. Aunque a priori las ratas almizcleras hagan migraciones aleatorias, en caso de que hayan condicionantes externos como falta de comida, accidentes geográficos que lo impidan, etc. tal afirmación no será cierta. En la siguiente sección veremos que introducir un coeficiente de difusión dependiente de espacio, tiempo e incluso de la densidad de población puede solucionar parte de estos problemas.

Imaginemos un borracho que debe llegar a su casa. A la salida del bar, se encuentra una hilera de farolas equiespaciadas una distancia h a izquierda y a derecha, pero en su estado solo es capaz de caminar de una farola a otra y tras ello descansar cierto periodo de tiempo, eligiendo la siguiente farola de manera arbitraria. Si cada intervalo de tiempo τ pasa de una farola a otra, la probabilidad de que esté en la farola n a tiempo $t + \tau$ satisfará:

$$p(nh, t + \tau) = \frac{1}{2}p(nh - h, t) + \frac{1}{2}p(nh + h, t) \tag{2.1}$$

ecuación conocida como la relación de Chapman-Kolmogorov.

Restando $p_{nh}(t)$ en ambos miembros, y desarrollando en serie de Taylor (transitamos al problema continuo definiendo $nh \equiv x$) llegamos a

$$\tau \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2) = \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

En el límite en que $\tau \to 0$, $h \to 0$ pero $h^2/2\tau \to D$, con D finito, obtenemos

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

donde ahora $p(nh,t)$ se ha cambiado por $\rho(x,t)$ que denota la "densidad de borrachos en la farola x a tiempo t".

En el contexto de movimiento browniano, h es el recorrido libre medio y τ el tiempo entre colisiones. Lo interesante de este acercamiento es que vemos que un proceso en esencia estocástico se puede acabar describiendo mediante una ecuación diferencial, proceso conocido como teoría potencial. Una inconveniencia podría ser que ciertos procesos poseyeran un recorrido libre medio macroscópico, haciendo que el paso al continuo careciera de sentido. Pero la teoria potencial, en su versión discreta, remedia el asunto, proporcionando por tanto un método más seguro para estudiar la evolución de poblaciones que se rijan por leyes estocásticas, abordables únicamente por métodos tales como Monte Carlo.

Para estudiar las propiedades de (2.2), generalicémosla a varias variables y permitamos que el coeficiente de difusión dependa tanto del tiempo como del espacio y de la población:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\mathbf{x},t,\rho)\rho(x,t)) \tag{2.3}$$

Lo primero que podemos ver es que, asumiendo que tanto ρ como sus derivadas primeras están confinadas en el espacio, la población total es constante: estamos en el caso de ZPG. Esto se puede probar como sigue:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x},t) \mathrm{d}^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} \mathrm{d}^3x \overset{(2.3)}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (D(\mathbf{x},t,\rho)\rho(x,t)) \, \mathrm{d}^3x = 0 \tag{2.4}$$

donde en la última desigualdad se ha aplicado el teorema de la divergencia.

Permitir que D varíe nos ayuda a reproducir fenómenos deseables. Por ejemplo, en la migración de las ratas almizcleras un accidente geográfico puede ralentizarlas, y ello puede ser tenido en cuenta por (2.3) haciendo que D varíe en consecuencia. En la migración no se seguirán líneas rectas sino caminos de menor resistencia. Por eso la difusión con D variable es deseable en el estudio de dinámica de poblaciones. Posteriormente veremos que hacer que D varíe proporcionalmente a la densidad de población puede emplearse para describir influencias sociales y territoriales en la emigración. Por simplicidad, en lo que sigue supondremos el espacio homogéneo (asunción lógica para tratar con viajes interespaciales), por lo que $D = D(t, \rho(\mathbf{x},t))$.

Fijémonos que, en casos en los que la población total sea constante, podemos definir una densidad de probabilidad asociada

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}, t) \mathrm{d}^3 x} \tag{2.5}$$

que satisfaría (2.3). Con ella, definimos la distancia cuadrática media como

$$\langle x^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} x^2 \mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$$

Utilizando la ecuación (2.2) e integrando por partes dos veces obtenemos que $\mathrm{d}\langle x^2 \rangle / \mathrm{d}t = 2D$. Integrando esta ecuación diferencial y tomando raíces cuadradas, encontramos que la velocidad representativa de avance sería

$$v_{\text{rep}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x^2 \rangle^{1/2} \sim t^{-1/2} \tag{2.6}$$

Tal dependencia con el tiempo no tiene sentido, pues en el movimiento browniano las partículas siempre se estan moviendo. Esta anomalía se debe a considerar tiempos menores al tiempo entre colisiones, como hizo notar Einstein en su estudio sobre el movimiento browniano. En él demostró rigurosamente que la velocidad correcta a tiempos pequeños es h/τ.

Por otro lado, podemos pensar una segunda forma de caracterizar la velocidad y es pensar la ecuación de difusión como una consecuencia de la ley de Fick: sea $\mathbf{j}$ el flujo de la población

$$\mathbf{j} = -D \nabla \rho$$

y se cumple la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

que en consecuencia nos devuelve (2.3). Fijémonos que usualmente el flujo y la velocidad se relacionan como $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, con lo que la velocidad asociada a la difusión sería

$$\mathbf{v} = -\frac{D}{\rho} \nabla \rho = -D \nabla \log(\rho) \tag{2.7}$$

Como vemos, el problema surge cuando $\rho \ll 1$, pues en tal caso la velocidad diverge. Es decir, imaginemos que tenemos inicialmente una función acotada en el espacio (por simplicidad, en una dimensión). La velocidad de avance del frente se hace infinita en la cola de la función, que es cuando $\rho = 0$. Se puede demostrar que la ecuación de difusión *regulariza* todas las soluciones iniciales.

En ambas descripciones de la velocidad nos surgen problemas, y esto se debe a que la solución de (2.2) viene dada por

$$\rho(x, t) = \rho_0 * \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\cdot|}{4Dt}}}{(4\pi D t)^{d/2}} \tag{2.8}$$

con $*$ denotando convolución, d la dimensión y ρ_0 la condición inicial[3]. La convolución con una gaussiana regulariza cualquier condición inicial, redistribuyendo la solución al siguiente instante por todo el espacio. Tal propiedad es claramente poco realista: no puede haber influencia inmediatamente en todo el espacio, necesitamos ecuaciones que nos den un frente definido que avance con el tiempo para modelizar una supuesta colonización.

Veamos ahora que podemos relacionar el coeficiente de difusión con la probabilidad de que un individuo abandone el sitio n por el sitio $n \pm 1$ en el siguiente paso temporal. Discretizando (2.2) obtenemos

$$\rho(nh, t+\tau) = \frac{D\tau}{h^2}\left[\rho(nh+h,t) + \rho(nh-h,t)\right] + \rho(nh,t)\left(1 - \frac{2D\tau}{h^2}\right)$$

por lo que podemos reinterpretar la versión discreta de la ecuación de difusión como que la probabilidad de tener un individuo a tiempo $t+\tau$ en el punto n es la debida (equiprobable) a saltar desde $n \pm 1$ mas la de permanencia en n, $1 - 2D\tau/h^2$. Por tanto, la probabilidad de dejar n debe ser

$$P = \frac{2D\tau}{h^2}$$

o, en m dimensiones y despejando

$$D = \frac{Ph^2}{2m\tau} \tag{2.10}$$

donde el factor m viene de considerar que si mallamos el espacio con una red cúbica, el punto n tiene $2m$ vecinos a distancia h en m dimensiones. Esta ecuación nos será de utilidad más adelante.

2.2. Coeficiente de difusión dependiente de la densidad

Consideremos ahora la siguiente dependencia para el coeficiente de difusión:

$$D(\rho) = D_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^N \tag{2.11}$$

con $N \geq 0$. En este caso, la probabilidad de abandonar un sitio dada por (2.10) depende del número de individuos en el sitio, o generalizando al caso continuo, de la densidad de población en un entorno del punto. Esta característica sí es deseable a

[3]De hecho, la solución a (2.1) es que, partiendo de $n = 0$ a tiempo $t = 0$, la probabilidad de estar en el sitio $2n$ a tiempo 2τ es

$$p(2n, 2\tau) = 2^{-2\tau}\frac{(2\tau)!}{(\tau+n)!(\tau-n)!} \to \frac{e^{-n^2/\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} \tag{2.9}$$

cuando $\tau \gg n \geq 1$, solución que es análoga a la dada por la convolución para el caso continuo si inicializamos con una delta centrada en el origen.

la hora de estudiar la migración de una especie o la decisión de una civilización de aventurarse en una expedición colonial: la probabilidad crecerá conforme aumente la población. Otra propiedad interesante es que, dado que $\nabla\rho$ apunta al máximo local de ρ, el flujo $\mathbf{j} = -D\nabla\rho$ está dirigido *hacia fuera* de éste. Esto de nuevo tiene sentido, la población emigra para desahogar la saturación local por crecer la densidad de población, con la subsecuente disminución de recursos en la zona. Esto hace que el modelo posea memoria: el movimiento de la población será hacia las zonas donde más rápido decrezca la densidad de población. Esta respuesta a la presión de población es altamente no lineal, al contrario que en el paseo del borracho. Por otro lado, notemos que el gradiente de la densidad juega un papel crucial: no habrá movimiento de la población si la distribución de ésta es aproximadamente constante, pese a estar saturada. El movimiento proviene de la zona en la que ρ comienza a decrecer. Démonos cuenta de que aun no hemos incluido procesos de crecimiento de población, seguimos con una civilización que practica ZPG. Es razonable pensar que cualquier civilización deba pasar por tal periodo, a fin de desarrollar la tecnología necesaria que le capacite para realizar viajes interestelares y colonizar otros planetas.

La ecuación de difusión en 3 dimensiones suponiendo simetría esférica tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 D_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^N \frac{\partial\rho}{\partial r}\right] \tag{2.12}$$

Esta ecuación ha sido estudiada en otros contextos, por ejemplo en problemas en medios porosos aplicándose en hidrología o ciencia de suelos. Nosotros volveremos a ella en 3.2.

Por otro lado, también aparece una ecuación formalmente idéntica a (2.3) con D dado según (2.11) en la física de gases de alta temperatura, estudiando problemas de ondas térmicas. Dado que "*las mismas ecuaciones poseen las mismas soluciones*", citando a Feynman, veamos las soluciones encontradas para este último problema por Zel'dovich y Raizer [5]. Estudiando la explosión de combustible nuclear, se encuentra que el gas emitido, debido a la gran movilidad de las partículas internas, se encuentra aproximadamente a tempratura constante (se termaliza extremadamente rápido), mientras que el frente viajero presenta un cambio brusco en la temperatura hasta hacerse nula quedando el gas confinado a cierta región. Dado que el intercambio de calor entre el frente de onda térmico y la atmosfera es escaso la temperatura neta cambia lentamente, y la forma se preserva en la evolución.

Se tiene que se satisface la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[aT^N \frac{\partial T}{\partial x}\right] \tag{2.13}$$

donde $T(x,t)$ es el campo de temperaturas y a una constante. Como antes, vemos que

$$Q = \int_{\mathbb{R}} T(x,t)\mathrm{d}x$$

es una cantidad conservada, por lo que podemos formar una cantidad adimensional combinándola junto con a y las coordenadas de espacio y tiempo

$$\xi = x(aQ^N t)^{-1/(N+2)} \tag{2.14}$$

Por otro lado, la cantidad $(Q^2/at)^{1/(N+2)}$ tiene dimensiones de temperatura, por lo que escribimos

$$T(x,t) = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{\frac{1}{N+2}} f(\xi)$$

con $f(\xi)$ una función que describirá el perfil de la región ocupada por el gas. Sustituyendo en (2.13), obtenemos que $f(\xi)$ satisface

$$(N+2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left((f(\xi))^N \frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right) + \xi\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + f(\xi) = 0$$

cuya solución es

$$f(\xi) = \begin{cases} \left[\dfrac{N\xi_0^2}{2(N+2)}\right]^{1/N} \times \left[1 - \left(\dfrac{\xi}{\xi_0}\right)^2\right]^{1/N} & \text{si} \quad |\xi| \leq \xi_0 \\ 0 & \text{si} \quad |\xi| > \xi_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

donde

$$\xi_0 = \left[\frac{(N+2)^{1+N} 2^{1-N}}{N\pi^{N/2}}\right]^{\frac{1}{N+2}} \times \left[\frac{\Gamma(1/2+1/N)}{\Gamma(1/N)}\right]^{\frac{N}{N+2}} \tag{2.16}$$

siendo Γ la función gamma.

Para el caso $N=0$ se recupera la solución de la ecuación (2.2) que ya comentamos, $f(\xi) = \sqrt{4\pi}\mathrm{e}^{-\xi^2/4}$. Dado que ξ_0 es finito siempre que $N > 0$, la función $f(\xi)$ está acotada y presenta un frente definido. Por definición de ξ (ecuación (2.14)) se tiene que el frente real estará en

$$x_f = \pm\xi_0(aQ^N t)^{\frac{1}{N+2}} \tag{2.17}$$

Para $N=0$ recuperamos la gaussiana, luego nuestra solución no está confinada. Pero para $N > 0$ la solución ya está confinada. En concreto, encontramos que si $0 < N < 1$ tenemos la distribución confinada y con derivada finita en el frente, mientras que para $1 \leq N$ está confinada pero con derivada infinita en el frente. Los casos $N = 0, 1$ y 2 se pueden ver en la figura 1.

Otro hecho destacable es que la forma de la distribución de temperaturas se preserva en esta solución. A soluciones que cumplen tal cosa se les conoce como "autosimilares". Generalmente, se caracterizan por una ecuación de la forma $r_f = At^\alpha$, donde r_f es una medida de la extensión del fenómeno estudiado y A, α constantes. Se pueden encontrar soluciones autosimilares usualmente de dos maneras: obteniendo α mediante análisis dimensional y escogiendo A para satisfacer cierta ley de conservación, o eligiendo α para asegurar la existencia de soluciones. Dentro de este

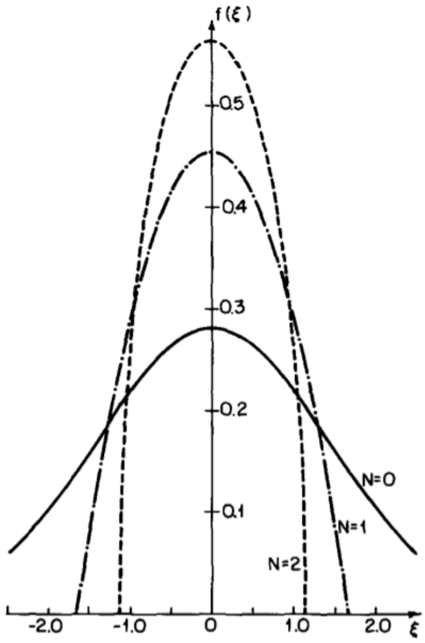

Figura 1: Perfil de las ondas térmicas para $N = 0, 1$ y 2 (extraído de [1]).

segundo tipo, veremos que la ecuación semilineal de difusión (apartado 3.1) posee soluciones de onda viajera, $\rho = \rho(x - vt)$, y buscaremos el rango de v para el que existe solución. Lo interesante de las soluciones autosimilares es que su dependencia recae sobre una sola variable adimensional (ξ en el caso anterior), y en la práctica la solución evoluciona "perdiendo memoria" respecto a las condiciones iniciales y de contorno, y asintóticamente evoluciona hacia una solución caracterizada por las cantidades conservadas como Q y los parámetros del problema como a (en el artículo se comenta que esta propiedad solo está demostrada para la ecuación (2.2) y para la semilineal que veremos más adelante, pero simulaciones numéricas parecen comprobar la hipótesis bajo un amplío abanico de condiciones iniciales).

En resumen, vemos que un coeficiente de difusión dependiende de la población ha conseguido que existan soluciones confinadas y que la velocidad de avance, encontrable derivando (2.17) respecto al tiempo, deje de ser anómala. Se encuentra que decrece monótonamente con el tiempo, debido a que nuestra ecuación aun posee la propiedad de población constante.

3. Crecimiento y difusión

Nos interesa ahora juntar ambos procesos: crecimiento y difusión. Tal empresa puede conseguirse sin más que generalizar las ecuaciones usadas para que incluyan ambos términos. Si el término de crecimiento viniese dado por una ley como (1.1), la población crecería exponencialmente lo cual no parece lógico para ninguna civilización: si ella no impone algún tipo de restricción, la falta de recursos (y su manifestación en forma de guerras internas, etc) lo hará por ella. Por tanto, es de suponer que el término de crecimiento quede mejor descrito por una logística, pues sabemos que presenta los comportamientos de crecimiento exponencial cuando la población es baja y saturación entorno a una población máxima permitida por el medio. Con ello en mente, estudiemos la ecuación de difusión semilineal.

3.1. La ecuación de difusión semilineal

Lo que haremos será suponer que el término de crecimiento viene dado por (1.2). Se tendrá por tanto que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_S}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

donde γ es la tasa de crecimiento local, ρ_S la población máxima que el medio local puede albergar y $D = D(\mathbf{x}, t, \rho(\mathbf{x}, t))$ el coeficiente de difusión local. Por simplicidad, se asumirá que tanto γ como ρ_S son constantes, y en este apartado la constante de difusión también lo será[4].

Con las transformaciónes $\rho \to \rho' = \rho/\rho_S$, $t \to t' = \gamma t$ y $x \to x' = x(D/\gamma)^{-1/2}$, la ecuación que queremos estudiar pasa a ser

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\,(1-\rho) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

(volvemos a usar variables sin primar por comodidad). Supongamos que la solución a (3.1) es una onda viajera hacia la derecha: $\rho(x,t) = \rho(x - \tilde{v}t)$, con $\tilde{v} = v(D\gamma)^{-1/2}$. Así obtenemos una ecuación diferencial para una única variable (que de nuevo por comodidad denotaremos simplemente x, correspondiente a la combinación $x - vt$):

$$-\tilde{v}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \rho(1-\rho) + \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}x^2} \tag{3.2}$$

Debemos encontrar el rango de $\tilde{v}$ para el cual existe solución (como ya aventuramos en la sección anterior que se hace con las ecuaciones autosimilares). Dado que asumimos una onda viajera, es de esperar que se cumpla que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \rho(x) =& 0\\ \lim_{x\to-\infty} \rho(x) =& 1\end{aligned}$$

es decir, en la zona aun no afectada por la onda viajera la densidad cae a cero. En la zona afectada se mantiene cerca de la unidad decayendo lentamente, ya que ahora permitimos procesos de crecimiento de población. Definimos ahora $q = -\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x$, con lo que por la regla de la cadena $\mathrm{d}/\mathrm{d}x = -q\mathrm{d}/\mathrm{d}\rho$ y convertimos (3.2) en una ecuación diferencial para q

$$\tilde{v}q = \rho(1-\rho) + q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho} \tag{3.3}$$

[4]Para $D =$ constante a tal modelo se le conoce como FKPP por Fisher [6] y Kolmogorov, Petrovski y Piskunov [7] que lo estudiaron simultáneamente.

Para $x \to \infty$ ($\rho \approx 0$), se reduce a $\tilde{v}q \approx \rho + q\mathrm{d}q/\mathrm{d}\rho$. Dado que en tal límite se espera que q se anule, podemos proponer como solución $q = b\rho^n$. Sustituyendo encontramos que ha de ocurrir que $n = 1$ y por tanto b satisface

$$\tilde{v}b = 1 + b^2 \Rightarrow b = \frac{\tilde{v} \pm \sqrt{\tilde{v} - 4}}{2}$$

con lo que el rango buscado es $\tilde{v} \geq 2$ en aras de mantener b real. Para una onda viajera hacia izquierdas habríamos obtenido $\tilde{v} \leq -2$. Fisher por un lado, y Kolmogorov, Petrovski y Piskunov por otro, demostraron que inicializando desde una función paso la solución converge a una onda viajera a derechas con velocidad $\tilde{v} = 2$. Aunque velocidades mayores son posibles, demostraron que asintóticamente la velocidad converge al mínimo. Por tanto, deshaciendo los cambios que introdujimos obtenemos que la velocidad de avance de la colonización sería $v = 2(D\gamma)^{1/2}$.

Notemos que pese a haber añadido un término de crecimiento, las cuentas realizadas han sido considerando difusión lineal: D constante. Aun así, hemos obtenido una velocidad bien definida: eso se debe a la ausencia de ZPG. Como defecto vemos que se sigue teniendo el problema del confinamiento. Para $\tilde{v} = 2$, $b = 1$ y se tiene que para $x \gg 1$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = -\rho \Rightarrow \rho \sim \mathrm{e}^{-x} \tag{3.4}$$

es decir, tenemos cierta cola en el infinito, luego nuestra población no está confinada. El aspecto de la solución es el de una S característica de soluciones de la ecuación logística desplazandose a derechas, con una cola que decae exponencialmente. Nos interesa que no haya cola, sino un frente definido como esperamos que ocurra en una colonización.

3.2. Difusión dependiente de la densidad con crecimiento y saturación

Podemos intuir ya qué es lo que hará que nuestras soluciones presenten un frente definido (confinamiento en el espacio) a la vez que procesos de crecimiento y saturación local: añadir dependencia en D respecto de la población. La ecuación (3.1) pasa a ser

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_S}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\frac{\rho}{\rho_S}\right)^N \frac{\partial \rho}{\partial x}\right]$$

Renombrando variables para eliminar las constantes como ya hicimos anteriormente obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\,(1 - \rho) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho^N \frac{\partial \rho}{\partial x}\right] \tag{3.5}$$

Por las propiedades ya comentadas, la ecuación anterior mostrará comportamientos tales como crecimiento local y saturación, flujo saliente de las concentraciones de población, confinamiento en el espacio y memoria.

En el artículo, Sagan y Newman la resuelven numéricamente tanto para una dimensión como para tres con simetría esférica. Inicializan el programa con una función escalón de anchura dada, y encuentran que evoluciona a una onda viajera. La simulación es realizada para tres valores de N en ambas geometrías: $N = 0, 1$ y 2. Los resultados se muestran en la figura 2

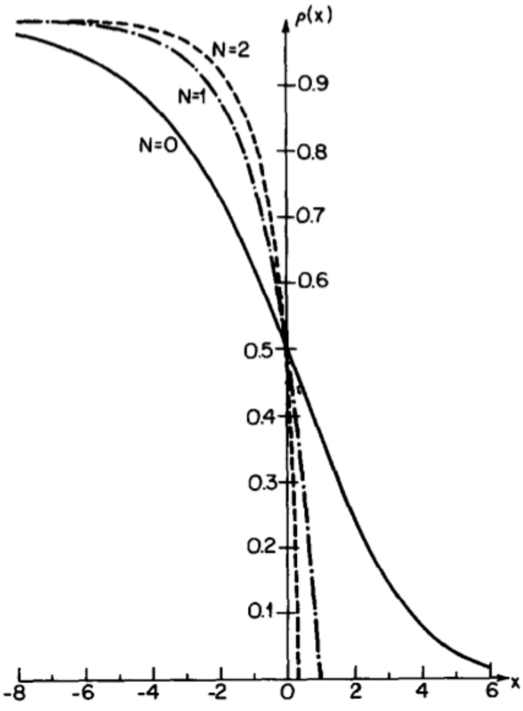

Figura 2: Perfil de ondas viajeras para $N = 0, 1$ y 2 (extraído de [1]).

Sagan y Newman encuentran para $N = 0$ que la solución evoluciona hacia una onda viajera a derechas con velocidad $\tilde{v} \approx 2$ en ambas situaciones (unidimensional y tridimensional con simetría esférica). No es sorprendente, argumentan, dado que la única diferencia entre ambas ecuaciones es un término cuya contribución decae en el tiempo. Para $N = 1$, 2 consideran que la convergencia a ondas viajeras es significante. Por otro lado, encuentran que la velocidad $\tilde{v}$ decrece con N, encontrando que $\tilde{v}_{N=1} \approx 0.70$ y $\tilde{v}_{N=2} \approx 0.45$.

Repitamos ahora el estudio aproximado de las soluciones de ondas viajeras a (3.5), ahora que tenemos un coeficiente de difusión dependiente de la densidad. Renombrando variables como en el anterior desarrollo, podemos transformarla en

$$-\tilde{v}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \rho(1-\rho) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\rho^N \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right)$$

y, haciendo $q = -\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x$ se convierte en

$$\tilde{v}q = \rho(1-\rho) + q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho^N q) \tag{3.6}$$

De nuevo, proponiendo $q = b\rho^n$ como solución para $x \to \infty$ encontramos lo siguiente:

$$q \approx \begin{cases} \tilde{v}\rho^{1-N}, & N > 0 \\ \frac{1}{2}[\tilde{v} + (\tilde{v}^2 - 4)^{1/2}]\rho, & N = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

y para $x \to -\infty$, como $\rho \approx 1$ esperamos que $q = \tilde{b}(1-\rho)^n$, con lo que encontramos $n = 1$ y

$$q \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{\tilde{v}^2 + 4} - \tilde{v}\right)(1 - \rho) \tag{3.8}$$

ecuación que es válida para todo N.

Para $x \to \infty$, si $N = 0$ ya hemos visto que la solución posee una cola exponencial. Pero para $N > 0$ se tiene que

$$\int_{\rho(x\to\infty)=0}^{\rho(x)} \mathrm{d}\rho(x)\rho(x)'^{N-1} = -\tilde{v}\int_{\infty}^{x} \mathrm{d}x' \equiv \tilde{v}\int_{x}^{\infty} \mathrm{d}x' \tag{3.9}$$

pero así tendríamos que la población diverge, cosa que sabemos que no es cierto. Debe existir cierto x_c que delimite un frente a partir del cual la población sea estrictamente nula, y por tanto la integral del miembro derecho solo se extiende al intervalo $[x, x_c]$ con lo que la solución para $x \to \infty$ es

$$\rho(x) \approx [N\tilde{v}(x_c - x)]^{1/N} \tag{3.10}$$

con $\rho(x \geq x_c) = 0$. El comportamiento es exactamente el mismo que Zel'dovich encuentra para la difusión de onda térmica: para $0 < N < 1$ se tiene $\rho, \rho_{,x}$ continuas, y a partir de ahí el gradiente de ρ es discontinuo para $N = 1$ e infinito para $N > 1$. Conforme N crece la solución se aproxima a un escalón en x_c. Por otro lado, Sagan y Newman se dieron cuenta realizando estas aproximaciones que (3.8) era una solución exacta a (3.6) cuando $\tilde{v} = 2^{-1/2}$, y encuentran que

$$\rho(x) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}(x - x_c)} \tag{3.11}$$

para $x < x_c$, y $\rho(x \geq x_c) = 0$. Tal perfil es el encontrado numéricamente para $N = 1$ anteriormente comentado, donde la velocidad era $0.70 \approx 2^{-1/2}$. Vemos que conforme $x \to -\infty$ tenemos un crecimiento exponencial hacia la saturación, y conforme $x \to x_c$ la solución decae exponencialmente hasta hacerse nula suavemente.

En resumen, hemos estudiado de manera independiente los procesos de crecimiento y difusión. Hemos visto qué propiedades deseables resultaban de generalizarlos ambos hasta tener procesos de crecimiento local y saturación, confinamiento de la población en el espacio, velocidad de avance del frente de colonización bien definida, y que el avance de la colonización proviene de aventureros cerca del frente gracias al gradiente de ρ. Esto último tiene sentido pensando en que los individuos pertenecientes a planetas interiores se sentirán menos tentados de embarcarse en una colozinación debido a que ya media una gran distancia entre ellos y el fin de su propia civilización (el frente de colonización). En la siguiente sección utilizaremos todo lo anterior para intentar estimar algunos números de avance.

Hemos comprobado por tanto que podemos modelar procesos de dispersión de especies mediante difusión si dejamos que el coeficiente de difusión dependa de la densidad de población. Ello nos permite reproducir emigraciones por presión de población, etc, y todo supeditado a la capacidad máxima de albergar población (recursos disponibles) del medio. Hemos podido estimar la velocidad de avance del frente mediante análisis dimensional, y que las cantidades adimensionales que han aparecido $(\xi, \tilde{v})$ han resultado ser del orden de la unidad, dependiendo como leyes de potencias con exponentes fraccionarios, lo que implica cierta insensibilidad al modelo y parámetros utilizados.

4. Velocidad de avance de la colonización

En la introducción comentamos que Jones encontraba velocidades de avance del frente de colonización nada despreciables, con las que una civilización colonizaría una galaxia en unos pocos millones de años. Veremos que Sagan y Newman obtienen resultados que contrastan fuertemente, y para ello necesitamos explicar brevemente el modelo empleado por Jones. Para él, el crecimiento y expansión de la población viene dado por:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right)(\gamma - \eta)\nu + I \tag{4.1}$$

con ν la población por planeta a una distancia dada del mundo de partida, ν_0 la población óptima para ese planeta (nuestra ρ_S), γ el ratio de crecimiento y η de emigración, e I el ratio de inmigración. Jones lo que hizo fue simular procesos de *scattering* hacia mundos despoblados en un volumen dado eligiendo ciertos valores de η/γ y ν_L/ν_0, con ν_L la población límite sobre la cual la inmigración no se permite para una colonia dada y bajo la cual no se produce emigración.

Jones encuentra que la distribución de la civilización colonial acaba con forma esférica aproximadamente, con el centro casi saturado. Ambos modelos dan un frente de onda de colonización en expansión uniforme para el caso con simetría esférica en nuestro modelo. Por lo anterior, en el modelo de Jones los colonizadores se aventuran solo desde una fina capa entorno a la superficie de la esfera, al igual que lo hacían en el de Sagan y Newman. Esto tiene que ver con lo ya comentado en la sección anterior: los viajes a cualquier velocidad han de ser increíblemente caros para cualquier civilización, bien por combustible para $v \sim c$ o bien por sistemas de mantenimiento y recursos necesarios para $v \ll c$. Luego es esperable que solo se vayan colonizando los sistemas estelares más próximos al frente de colonización, y por tanto que el flujo de colonizadores parta de ahí.

El ratio de la velocidad de avance del frente respecto a la de una nave individual debe ser en el modelo de Jones

$$\frac{v}{v_S} = \frac{t_{\text{travel}}}{t_{\text{travel}} + t_{\text{growth}}} \tag{4.2}$$

donde $t_{\text{travel}} = \Delta x / v_S$ es el tiempo necesario para viajar entre dos sistemas susceptibles de colonización separados Δx y t_{growth} el tiempo necesario desde que una colonia se asienta hasta que sucesivos descendientes se ven en la necesidad de lanzar otra aventura colonial.

Estimar t_{growth} no es tarea fácil, pero Sagan y Newman encuentran utilizando (4.1) que debe ser

$$t_{\text{growth}} \approx \frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{2\gamma\nu_L/\nu_0}{\eta(1-\nu_L/\nu_0)} \right] \tag{4.3}$$

por lo que, combinando (4.2) y (4.3) con $\nu_L/\nu_0 = 1/2$ (valor elegido por Jones) se obtiene

$$\frac{v}{v_S} \approx \frac{\gamma\Delta x}{\gamma\Delta x + v_S \log(2\gamma/\eta)} \tag{4.4}$$

Para obtener las velocidades dadas por Jones, debe ocurrir que γ y η posean valores extremadamente altos, propios de poblaciones expansionistas, pero Sagan y Newman opinan que primarían motivos de índole social y económica que rebajarían bastante tales valores a los propios para humanos (valores que usaremos en lo que sigue para estimar las velocidades que tendrían los frentes según los modelos discutidos en el trabajo previo). Por otro lado, la discretización de los modelos puede acabar por inducir cambios importantes y necesarios: por ejemplo, para difusión no lineal con crecimiento podemos encontrar una cantidad con dimensiones de distancia dada por $l = \sqrt{D/\gamma}$, que resulta ser aproximadamente el ancho del frente de colonización. Para relacionar η con nuestras constantes, podemos suponer la relación $D \sim \eta\Delta x^2$, con lo que $l \sim \sqrt{\eta/\gamma}\Delta x$. Usualmente una población animal presenta valores de emigración mucho mayores que de crecimiento pues suelen realizar procesos de dispersión a lo largo de su vida. Por lo que en el estudio de poblaciones animales los efectos de discretización son despreciables ya que $l \gg \Delta x$. Pero para humanos, han habido periodos en los que $\Delta x \gg l$ por lo que la discretización introduce correcciones apreciables que Sagan y Newman tienen en cuenta en el artículo.

Para intentar estimar algunas velocidades plausibles de avance de colonización, usemos la ecuación de Drake:

$$N' = fL \tag{4.5}$$

donde N' es el número aproximadamente estacionario de civilizaciones en nuestra galaxia más avanzadas que la nuestra, L el tiempo de vida media de tales civilizaciones en años y f un factor que toma en cuenta ratios de formación de estrellas, fracciones de estrellas con sistemas planetarios, etc. Usualmente se estima que $f \sim 10^{-1}\,\text{year}^{-1}$, aunque en caso de colonización la probabilidad de tener vida inteligente y con tecnología avanzada en un planeta dado se aproxima a la unidad, por lo que f puede hascender hasta dos órdenes de magnitud por encima del anterior.

Si asumimos una separación media de estrellas en nuestra galaxia de 1 pc (un parsec, equivalente a 3.26 años luz), y como nuestra galaxia tiene del orden de $2.5 \cdot 10^{11}$ estrellas, se tiene que la distancia media entre civilizaciones avanzadas sería (suponiendo distribución esférica de estrellas en la galaxia):

$$\Lambda \approx \left(\frac{2.5 \cdot 10^{11}}{N'} \right)^{1/3} = \left(\frac{2.5 \cdot 10^{11}}{fL} \right)^{1/3} \text{ pc} \tag{4.6}$$

que, usando un valor usualmente otorgado a N' del orden del millón de civilizaciones, obtenemos que $\Lambda \approx 63\,\mathrm{pc} = 205\,\mathrm{ly}$.

Recordemos que habíamos encontrado que la probabilidad de difusión a otro planeta alejado Δx en un tiempo Δt

$$P = \frac{2mD\Delta t}{\Delta x^2}$$

Podemos definir entonces la tasa específica de emigración como

$$\Psi = \frac{P}{\Delta t} = \frac{2mD}{\Delta x^2} \tag{4.7}$$

que nos da la fracción de la población que emigra por unidad de tiempo al siguiente sistema estelar habitable. Tomamos Δt como el tiempo entre aventuras coloniales sucesivas. Es imposible realizar aproximaciones realistas de Ψ, tomemos como ejemplo la historia de la humanidad: Sagan y Newman estiman en su artículo para ciertas emigraciones históricas de civilizaciones antiguas valores desde $\Psi \sim 10^{-7}\,\mathrm{year}^{-1}$ para la exploración por la armada Ming en el océano índico en el siglo XVI hasta $\Psi \sim 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{year}^{-1}$ durante la colonización europea de América del Norte. Propuestas de ciudades espaciales darían $\Psi \sim 10^{-8}\,\mathrm{year}^{-1}$, por lo que en general podemos suponer $\Psi \in [10^{-8}, 10^{-4}]\,\mathrm{year}^{-1}$.

Por otro lado, la gran abundancia de sistemas solares en nuestra galaxia con muchos planetas en la zona de habitabilidad nos hace inclinarnos por valores de $\Delta x^2 \in [3, 10^3]\,\mathrm{pc}^2$, con un valor predilecto de $\Delta x^2 \sim 10\,\mathrm{pc}^2$.

Sea $t_{\min}$ el tiempo minimo necesario para que un frente de colonización nos alcance desde la civilización técnica avanzada más cercana a nosotros. Por definición, $vt_{\min} = \Lambda$. Si L es el periodo de vida de la civilización, existe un periodo de vida mínimo crítico para que una civilización pueda alcanzarnos

$$L_c = t_{\min} = \Lambda/v \tag{4.8}$$

Para que la civilización más cercana llegase a la Tierra mediante difusión debería ocurrir que $L > L_c$.

Combinando todo lo anterior se encuentra que para poblaciones con crecimiento local/saturación y expandiéndose por difusión (ecuaciones (4.6),(4.7), (4.8) y que $v = \tilde{v}(D\gamma)^{1/2}$):

$$L_c^{\cancel{ZPG}} = 1.95 \cdot 10^{21/8} f^{-1/4} \left(\frac{\tilde{v}}{2}\right)^{-3/4} \left[\gamma \Psi \Delta x^2\right]^{-3/8} \text{ years} \tag{4.9}$$

donde el factor proporcional a $\tilde{v}$ es una corrección debida a la discretización y $\cancel{ZPG}$ hace alusión a que es para el modelo con crecimiento, mientras que para poblaciones practicando ZPG se tiene (usando (2.17) con $N = 2$)

$$L_c^{\mathrm{ZPG}} = 1.3 \cdot 10^{90/11} (f)^{-8/11} \left(\Delta x^2\right)^{-12/11} (\Psi)^{-3/11} \text{ years} \tag{4.10}$$

(los efectos de discretización son despreciables para ZPG pues contribuyen de manera proporcional a γ).

Fijémonos que para poblaciones con crecimiento ($L_c \gg \gamma^{-1}$) se tiene que L_c crece conforme γ decrece. Para los valores mínimos $(f, \Psi, \gamma, \Delta x) = (0.1, 10^{-8}, 10^{-4}, 1)$ se encuentra $L_c^{\cancel{ZPG}} \sim 46 \cdot 10^6$ años y $L_c^{ZPG} \gg t_{\text{universo}}$. Para los valores máximos $(f, \Psi, \gamma, \Delta x) = (10, 10^{-4}, 10^{-4}, 1000)$, $L_c^{\cancel{ZPG}} = 2.3 \cdot 10^4$ años y $L_c^{ZPG} \sim 1.8 \cdot 10^5$. Se tiene en general una transición suave entre ambos modelos: conforme γ decrece, L_c crece hasta alcanzar el valor dado para ZPG.

Para que el frente de colonización de la civilización avanzada más próxima alcance la tierra, tal civilización debe haber existido por periodo de más de 20 millones de años asumiendo el modelo de crecimiento y saturación con difusión no lineal. En la distancia que media entre ellos y nosotros (~ 63 pc), tal civilización habría encontrado 200000 sistemas planetarios antes de encontrar a la Tierra. Por tanto, podemos imaginar que muchas civilizaciones expandiéndose simplemente por difusión ocuparían solo un insignificante volumen de la galaxia, y ni si quiera llegarían a la siguiente civilización más próxima, posean intereses coloniales o no.

Para ZPG estricto la situación aun es peor: L_c es del orden de la edad de nuestro universo, por lo que sería muy improbable entrar en contacto con una población que lo practique. Por lo que ZPG estricto explicaría por sí solo la ausencia de contacto con otras civilizaciones.

La velocidad de avance del frente de colonización mínima para que la siguiente civilización más cercana llegue a la Tierra previa su extinción viene dada por

$$v = \frac{\Lambda(L_c)}{L_c} = 2.6 \cdot 10^{-1/2} \left(\frac{\tilde{v}}{2}\right) \left[\gamma \Psi \Delta x^2\right]^{1/2} \text{ pc/year} \tag{4.11}$$

con de nuevo, el término proporcional a $\tilde{v}$ debido a efectos de discretización. Ocurre también que tal combinación es la única posible entre $\gamma, \Delta x$ y Ψ con unidades de velocidad. Para los máximos valores de estas tres constantes $(\Psi, \gamma, \Delta x) = (3 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}, 1000)$ obtenemos $v \sim 4 \cdot 10^{-5}$ pc/year, valor menor incluso que las velocidades actuales de las sondas Pioneer o las Voyager. De hecho, a velocidades tan pequeñas (~ 40 km/s) la rotación diferencial de la galaxia y velocidades peculiares de los sistemas estelares influirían en la planificación de un viaje a gran escala para una colonización, tal vez distorsionando la esfera de colonización produciendo un tubo orientado a lo largo de un brazo espiral.

Por otro lado, civilizaciones más antiguas, del orden de miles o decenas de miles de millones de años, sí podrían haber alcanzado actualmente la Tierra, aunque especular sobre las motivaciones para hacerlo o la ciencia y tecnología que posean escapa demasiado a nuestra imaginación para ser de utilidad.

Por lo anterior, vemos que solo civilizaciones con $10^5 \lesssim L \lesssim 10^7$ (o mayores como comentábamos en el párrafo anterior) podrían haber iniciado una aventura colonial con un frente de onda alcanzando la Tierra desde el sistema estelar más cercano con una civilización técnica avanzada. Podríamos pensar que tales tiempos de vida son altamente difíciles de alcanzar, ya sea porque las civilizaciones sucumben tras catástrofes naturales o porque se autodestruyen, etc. Fijémonos que en las vecindades de nuestro sistema solar es improbable que hayan estrellas más antiguas que nuestro Sol. Dado que es lógico suponer que desde el origen de la vida en un planeta hasta el desarrollo de una civilización técnica debe pasar un tiempo tal vez varias veces mayor a los mil millones de años (nosotros aparecimos en la Tierra casi cuatro mil millones de años despues de que la vida comenzara), es bastante probable que no hayan civilizaciones con $L \gg 10^6$ años en nuestro vecindario.

Podemos dividir a las civilizaciones en antiguas; $L \gg 10^6$ años y jóvenes; $L \ll 10^6$ años Es difícil especular sobre las viejas, aunque las razones alegadas a lo largo de este trabajo hacen que Sagan y Newman se inclinen hacia que los motivos para iniciar una expansión colonial pueden decaer conforme la edad de la civilización aumenta. Sobre las civilizaciones jóvenes, vemos que aunque se embarquen en viajes coloniales, se crearían imperios de a lo sumo cientos o miles de mundos, pero hay demasiados mundos como para esperar que un "imperio galáctico" exista, alegan Sagan y Newman.

Quizá la evolución de las civilizaciones en la galaxia sea paralela a la de las civilizaciones en la Tierra y podamos preguntarnos si pueden llegar a surgir conflictos entre dos civilizaciones. En nuestra historia, los individuos comienzan por juntarse en grupos de familias, y finalmente forman grupos mayores (tribus), ciudades-estado, naciones, superpotencias, y tal vez un final estado global. Si es tal el caso también para civilizaciones en la galaxia, la Tierra presentaría actualmente el estado de familia, empezando a preguntarse si existirán agrupaciones semejantes ahí fuera. Según la situación esperable descrita en el párrafo anterior, las guerras serían en el estadío de "ciudades-estado", tales como las guerras entre Esparta y Atenas. Lo más probable es que ni siquiera las guerras se parezcan a lo que estamos habituados: es muy difícil que dos civilizaciones entren en conflicto en un estado de igual madurez tecnológica para ambas, y por tanto la más avanzada borraría del mapa a la menos avanzada con facilidad. La situación es similiar a la conquista de américa por los colonos europeos, o por ejemplo a un encuentro actual entre una nación con poder militar al nivel de bombas de destrucción masiva con una tribu desconexa del resto del mundo perdida en el desierto africano.

Para estimar la probabilidad de encuentros entre dos civilizaciones supongamos que se distribuyen aleatoria y uniformemente, por lo que la probabilidad de interactuar será

$$p \lesssim (d/\Lambda)^3 \tag{4.12}$$

con Λ dada por (4.6) y $d = vL = \tilde{v}(D\gamma)^{1/2}L$ el valor medio del radio máximo ocupado por una civilización en expansión colonial. Usando (4.6), (4.7) y (4.9) encontramos

$$p \lesssim \left(\frac{L}{L_c}\right)^4, \quad L \leq L_c \tag{4.13}$$

por lo que la probabilidad de que dos civilizaciones interactuen es despreciable salvo que $L \approx L_c$. Si el tiempo de vida de una civilización necesario para que pueda entrar en contacto es del orden de 10^7 años, y si suponemos que todas las civilizaciones se encuentran en $L \sim 10^6$ años, entonces solo 1 de cada 10 mil civilizaciones estaría interactuando. Si suponemos de nuevo que $N' \sim 10^6$, entonces 100 civilizaciones interactúan en cada momento. Si rebajamos L un orden de magnitud, entonces solo 1 de cada 100 millones estarían interactuando, y por tanto para $N' \leq 10^6$ no se producirían contactos; i.e. no es probable que se den guerras espaciales[5]).

En resumen, una civilización suficientemente avanzada podría haber colonizado hoy día la galaxia entera, y teorizar acerca de los motivos por los cuales lo ha hecho (y quizá ha impuesto un estricto control acerca de informar a mundos aun en periodo de madurez tecnológica) o no lo ha hecho (tal vez por desmotivación acerca de embarcarse en viajes interestelares una vez la tecnología posibilita la inmortalidad) escapan a análisis serios, e incluirlos responde únicamente a un afán por dejar volar la imaginación. En cuanto a civilizaciones de entre cien mil y diez millones de años, Sagan y Newman presuponen que la expansión colonial responde a una sed de conocimiento, o a un seguro contra la autodestrucción, más que a una válvula viable contra la sobrepoblación (que como ya hemos discutido no solucionaría) o un instrumento de conquista territorial, y por ello la expansión por difusión dependiente de la densidad de población se muestra como un buen modelo aplicable a tal situación.

Es cuando menos curioso que la respuesta a la pregunta iniciada por Fermi parezca depender de la ética y política aplicadas por civilizaciones avanzadas. Por otro lado, Sagan y Newman finalizan el artículo reseñando que podría ser que el frente de la onda viajera de colonización de una civilización próxima esté a pocos cientos de años de alcanzarnos, y las recientes (desde hace ~ 70 años) emisiones al espacio de ondas electromagnéticas marcándonos como una emergente civilización tecnológica provoquen una respuesta en los colonizadores del frente que, de poseer naves capaces de viajar a velocidades $\sim 0.1c$ podrían presentarse en la Tierra en un corto periodo de tiempo.

[5]Denotadas jocosamente *Star Wars* por Sagan y Newman en el artículo, al igual que cuando escriben "imperio galáctico"lo denotan como *Galactic Empire*. Imaginamos que lo primero es en alusión a la saga Star Wars, saga con la que Carl Sagan era muy crítico, y lo segundo por las novelas de la *Fundación* de Asimov.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos revisado el artículo de Sagan y Newman en el que se estudian diversos modelos aplicables a la dispersión de especies y se intenta particularizar al caso de expansión colonial de una supuesta civilización galáctica más avanzada.

Hemos empezado revisando dos modelos para el crecimiento de una especie: lineal y logístico. Las más deseables características del segundo han hecho que se prefiera su uso en el resto del trabajo. Suponiendo que la dispersión de una especie se realiza mediante difusión, hemos estudiado modelos asociados a difusión: hemos deducido la ecuación de difusión lineal a partir de un modelo microscópico, comentado sus defectos, y generalizado a coeficiente de difusión dependiente de la densidad para solventarlos. Esto nos ha llevado a las deseosas cualidades de flujo saliente de los núcleos de población, confinamiento en el espacio y velocidad del frente bien definida.

Por último, se han utilizado éstos análisis y añadido algunas conjeturas extras para estudiar el tiempo de vida necesario para que la civilización avanzada más cercana nos alcance, tanto si practica estricto ZPG como si sufre crecimiento local y saturación. Para ZPG hemos encontrado tiempos prohibitivos, lo que explica por sí solo el hecho de que aun no tengamos noticias de otras civilizaciones. Para los modelos que permiten crecimiento, hemos visto que el tiempo puede oscilar en función de los parámetros elegidos tomando valores de entre $\sim 10^5$ años hasta $\sim 10^7$ años. Una civilización así de antigua puede alcanzarnos sobradamente por viaje directo, pero no si suponemos que el frente de colonización evoluciona mediante un proceso de difusión dependiente de la densidad y con crecimiento local. En tal caso, la cantidad de planetas inmensa que media entre su civilización y la nuestra evitaría que nos hubieran alcanzado aun. Tal resultado por supuesto depende fuertemente de la política y ética que impere en susodicha civilización.

Finalmente, se reseña el hecho de que las recientes emisiones desde la Tierra hacia el espacio mediante ondas electromagnéticas (radio, televisión) podrían provocar respuestas en una civilización que esté a la *escucha* (tal como en la Tierra se está en proyectos como SETI) que harían que el encuentro se adelantase enormemente.

Referencias

[1] Sagan, C. & Newman, W. I., *Galactic Civilizactions: Population Dynamics and Interstellar Diffusion*, Icarus, vol. **46**, June 1981, p. 293-327

[2] Dyson, Freeman J. (1960). *Search for Artificial Stellar Sources of Infra-Red Radiation*. Science. 131 (3414): 1667–1668.

[3] Jones, E. M. *Colonization of the galaxy*. Icarus **28** (1976) p. 421-422

[4] Jones, E. M. *Interstellar colonizacion*. J Ḃrit. Interplan. Soc. **31** (1978) p. 103-107

[5] Zel'dovich, Ya. B. & Raizer, Yu. P. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodinamic Phenomena*, Vol II, Chapter X. Academic Press, New York (1967)

[6] Fisher, R. A. *The wave of advance of advantageous genes*. Ann. Eugen. **7**, p. 355-369 (1937)

[7] Kolmogorof, A., Petrovsky, I. & Piscounoff, N. *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matrière et son application a un problème biologique*. Bull. Univ. Moskou. Ser. Internat. Sect. A, **1(6)**, p. 1-25. (1937)