Seminario de Matemática Pura y Aplicada
“Acerca de la Cohomología de deRham y algunas aplicaciones”

Enrique Idael Chávez Sarmiento

Asesor: Félix Escalante del Águila

Julio, 2009

Resumen

En este trabajo estudiaremos algunas nociones de Cohomología de deRham, una herramienta útil para distinguir y hasta cierto punto clasificar superficies del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, asociándoles un objeto algebraico, en este caso un espacio vectorial. Los resultados principales que probaremos son el teorema de Invarianza por Homotopías, el teorema de Dualidad de Alexander y el Teorema de Jordan-Brouwer. Con este fin introduciremos brevemente algunas nociones de superficies en $\mathbb{R}^n$, formas diferenciales, homotopía y mencionaremos algunas herramientas algebraicas que utilizaremos para luego estudiar la Cohomología de deRham propiamente dicha.

Índice

1. Preliminares

En adelante presentaremos brevemente algunos resultados que usaremos para el estudio de la Cohomología de deRham en superficies de $\mathbb{R}^n$, para mayores detalles acerca de estos temas se puede revisar [2], [4] y [5].

1.1. Superficies diferenciables

En esta sección veremos brevemente algunos resultados sobre superficies en $\mathbb{R}^n$ que utilizaremos en el resto de este trabajo.

1.1 Definición. Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos. Si $\varphi : V_0 \to V$ es un homeomorfismo de clase C^k y $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $x \in V_0$, diremos que φ es una *parametrización* de clase C^k y dimensión m de V.

1.2 Definición. Diremos que $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una *superficie* de dimensión m y clase C^k cuando todo punto $p \in M$ esta contenido en algún abierto U de $\mathbb{R}^n$, tal que $V = U \cap M$ es la imágen de una parametreización $\varphi : V_0 \to V$, de dimensión m y clase C^k, que llamaremos parametrización de p en M.

1.1 Observación. Dada una parametrización $\varphi : V_0 \to V$ en M como la anterior, para $p = \varphi(x) \in M$, diremos que $V \subset M$ es una *vecindad abierta* de p en M.

En lo que resta de esta sección $M \subseteq \mathbb{R}^n$ será una superficie de dimensión m y clase C^k, $N \subseteq \mathbb{R}^s$ y $P \subseteq \mathbb{R}^l$ serán también superficies.

Teorema 1.1. *Sea $\varphi : V_0 \to V$ una parametrización en M. Para cada $p = \varphi(x_0)$, existe una proyección $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que toda vecindad Z_0 de x_0 contenida en V_0 es aplicada difeomórficamente por $\pi \circ \varphi$ sobre un abierto $W_0 \in \mathbb{R}^m$.*

De este resultado se sigue el siguiente

Corolario 1.1. *Toda superficie de clase C^k es localmente el gráfico de una aplicación de clase C^k.*

Formalicemos ahora nuestra noción de "tangencia" mediante la siguiente

1.3 Definición. Sean $p \in V \subseteq M$ y $\varphi : V_0 \to V$ una parametrización de p en M con $\varphi(x_0) = p$. Definimos el *espacio vectorial tangente* a M en el punto p, $T_pM \subseteq \mathbb{R}^n$, como la imágen de la la derivada $\varphi'(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

1.2 Observación. Para $p \in M$ se tiene que:

1. T_pM es igual al conjunto de los vectores $v = \lambda'(0)$ de los caminos diferenciables $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tales que $\lambda(0) = p$.

2. T_pM no depende de la parametrización de p sobre M que tomemos.

3. Dada $\varphi : V_0 \to V$ una parametrización de p en M con $\varphi(x_0) = p$, T_pM es un espacio m-dimensional de $\mathbb{R}^n$ y los vectores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x_0)$$

   forman una base de este espacio, llamada base asociada a la parametrización φ.

1.4 Definición. Diremos que la aplicación $f : M \to N$ es de clase C^r $(r \leq k)$, cuando considerada como aplicación de M en $\mathbb{R}^s$ se tiene que para todo $p \in M$ y $\varphi : V_0 \to V$ su parametrización en M, la composición $f \circ \varphi : V_0 \to \mathbb{R}^s$ es de clase C^k.

1.3 Observación. La anterior definición no depende de la parametrización $\varphi : V_0 \to V$ de p en M escogida.

1.5 Definición. Sea $f : M \to N$ de clase C^1 y $p \in M$ con $f(p) = q$. La *derivada* de f en el punto p es la transformación lineal $f'(p) : T_pM \to T_qN$ definida por $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0)$, donde $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es un camino diferenciable tal que $\lambda(0) = p$ y $\lambda'(0) = v$.

1.4 Observación. Para $v \in T_pM$, $f : M \to N$ y $g : N \to P$, tenemos que:

1. La anterior definición no depende del camino $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ que se tome.

2. Si $\varphi : V_0 \to V \subseteq M$ es una parametrización de p en M con $\varphi(x_0) = p$, entonces para algún $v_0 \in \mathbb{R}^m$, $v = \varphi'(x_0) \cdot v_0$ y $f'(p) = (f \circ \varphi)'(x_0) \cdot v_0$.

3. Si f y g son de clase C^r, vale la regla de la cadena, esto es $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$.

Proposición 1.1. *Todo punto de M posee una vecindad abierta $U \subseteq M$ en la que están definidos $r = n - m$ campos de vectores normales, de clase C^k, ortonormales en cada punto de U.*

Demostración. Supondremos que $r > 0$, pues el caso $r = 0$ es trivial.

Si cada punto de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+r}$ lo escribmos de la forma (x, y) con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^r$, por el corolario 1.1, tenemos que todo punto de M tiene una vecindad abierta $U \subseteq M$, para la que existe $f_U : U_0 \to \mathbb{R}^r$ de clase C^k en el abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$, tal que $U = \{(x, f_U(x)) \in \mathbb{R}^n; x \in U_0\}$.

Sea $W = U_0 \times \mathbb{R}^r$, definamos $g = (g_1, \ldots, g_r) : W \to \mathbb{R}^r$ por $g(x, y) = y - f_U(x)$. Tenemos que g es de clase C^k y además para cada $(x, y) \in W$, $g'(x, y)$ tiene rango r, pues $g'(x, y) \cdot (0, w) = w$ para todo $w \in \mathbb{R}^n$. Luego en cada punto $(x, y) \in W$ los vectores $w_i(x, y) = \mathrm{grad} g_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, r$, son linealmente independientes. En particular, si $p = (x, f_U(x)) \in U = g^{-1}(0)$, $w(p)$ es ortogonal a $T_pM = T_pU$. De esta manera obtenemos r campos vectoriales $w_i, \ldots, w_r : U \to \mathbb{R}^n$, de clase C^{k-1}, normales a M, linealmente independientes y que aplicando el proceso de Gram-Schmidt si es necesario, los podemos suponer ortonormales. □

1.2. Vecindad tubular

En esta sección probaremos que para superficies lo suficientemente suaves existen vecindades “bien comportadas”, este hecho nos permitirá mostrar más adelante el lema de Poicaré.

A lo largo de la sección M será una superficie de dimensión n en $\mathbb{R}^{m+n}$ y clase C^k con $k \geq 2$

1.6 Definición. Definimos la *bola normal abierta* de radio ε y centro en $x \in M$ como el conjunto

$$B^{\perp}(x; \varepsilon) := B(x; \varepsilon) \cap (x + T_xM^{\perp}). \tag{1}$$

1.7 Definición. Sea $p \in M$. Si existe una vecindad abierta $U \subseteq M$ de p y un número $\varepsilon > 0$ tal que:

1. Cualesquiera dos bolas normales de radio ε y centros en puntos distintos de U son siempre disjuntas;
2. La unión $V_\varepsilon(U) := \displaystyle\bigcup_{x \in U} B^\perp(x;\varepsilon)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{m+n}$ y
3. La aplicación $\pi : V_\varepsilon(U) \to U$, definida por $\pi(z) = x$ si $z \in B^\perp(x;\varepsilon)$, es de clase C^{k-1}.

Diremos que $V_\varepsilon(U)$ es una *vecindad tubular local* del punto p en la superficie M.

En el siguiente teorema veremos que las vecindades tubulares locales existen, más aún, mostraremos que todo punto de M posee una vecindad tubular local.

Teorema 1.2. *Todo punto de M posee una vecindad tubular local.*

Demostración. Sea $p \in M$, por la proposición 1.1 sabemos que existe una vecindad abierta $U \subseteq M$ en donde estan definidos campos vectoriales $w_1, \dots, w_n$, de clase C^{k-1}, que forman para cada punto $q \in U$ una base ortonormal de $T_qM^\perp$. Defininamos la aplicación $\Phi : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$, por

$$\Phi(q,y) := q + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot w_i(q), \quad q \in U \text{ e } y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Notemos que Φ es de clase C^{k-1}, además para cada $q \in U$ y $\varepsilon > 0$, $\Phi(q \times B(0;\varepsilon)) = B^\perp(q;\varepsilon)$ y

$$\Phi'(p,0) \cdot (u,v) = u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot w_i(p), \quad u \in T_pM \text{ y } v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \tag{3}$$

Luego $\phi'(p,0) : T_pM \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ es un isomorfismo, entonces por el Teorema de la Aplicación Inversa, podemos reducir U si es necesario de modo que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $\Phi : U \times B(0;\varepsilon) \to \phi(U \times B(0;\varepsilon))$ sea un difeomorfismo de clase C^{k-1}, donde $\phi(U \times B(0;\varepsilon))$ es de la forma

$$\phi(U \times B(0;\varepsilon)) = \bigcup_{x \in U} B^\perp(x;\varepsilon) = V_\varepsilon(U). \tag{4}$$

Veamos finalmente que la aplicación π, definida como en la definición de vecindad tubular local, es de clase C^{k-1}. Tenemos que $\pi \circ \Phi : U \times B(0,\varepsilon) \to U$ está dada por $\pi \circ \Phi(p,y) = p$ para cualquier $p \in U$ e $y \in \mathbb{R}^n$, luego $\pi \circ \Phi$ es de clase C^∞ y por tanto $\pi = (\pi \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ es de clase C^{k-1} en U. □

Corolario 1.2. *Todo punto $p \in M$ posee una vecindad tubular local $V_\varepsilon(U)$ tal que $V_\varepsilon(U) \cap M = U$,*

Demostración. Sea $V_\varepsilon(U)$ una vecindad tubular local de p en M y $A \in \mathbb{R}^{m+n}$ un abierto tal que $U = A \cap M$. De la demostración del teorema 1.2 se deduce que podemos tomar una vecindad tubular local $V_{\varepsilon'}(U')$ de p en M, tal que $U' \subseteq U$, $\varepsilon' < \varepsilon$ y $V_{\varepsilon'}(U') \subseteq A$.

Veamos que $V_{\varepsilon'}(U')$ es la vecindad que buscamos. En efecto, tenemos que $V_{\varepsilon'}(U') \cap M \subset A \cap M = U$ además si $y \in A \cap V_{\varepsilon'}(U')$, $y \in B^\perp(x;\varepsilon') \subset B^\perp(x;\varepsilon)$ para algún $x \in U'$, luego $y \in B^\perp(x;\varepsilon) \cap B^\perp(y;\varepsilon)$ y por tanto $y = x \in U'$. □

1.8 Definición. Si existe una función continua positiva $\varepsilon : M \to \mathbb{R}^+$ tal que:

1. Para $x \neq y$ en M arbitrarias, las bolas normales $B^\perp(x, \varepsilon(x))$ y $B^\perp(y, \varepsilon(y))$ son disjuntas;
2. La unión $V_\varepsilon(M) := \bigcup_{x\in M} B^\perp(x; \varepsilon(x))$ es un abierto de $\mathbb{R}^{m+n}$; y
3. La aplicación $\pi : V_\varepsilon(M) \to M$, definida por $\pi(z) = x$ si $z \in B^\perp(x; \varepsilon(x))$, es de clase C^{k-1}.

Diremos que $V_\varepsilon(M)$ es una *vecindad tubular* de M con radio ε.

El siguiente teorema mostrará que las vecindades tubulares existen

Teorema 1.3. *M admite una vecindad tubular.*

Demostración. Para $p \in M$ tomemos $V_\varepsilon(U)$ una vecindad tubular local de p como la del corolario 1.2 donde además podemos suponer que $\overline{U}$ es compacto. Sea $B(p; 3r) \subset V_\varepsilon(U)$ y consideremos cualquier vecindad tubular local de p $V_{\varepsilon_p}(U_p)$ tal que $U' \subset U$, $0 < \varepsilon_p < \varepsilon$ y $V_{\varepsilon_p}(U_p) \subset B(p; r)$.

Afirmamos que para todo $z \in V_{\varepsilon_p}(U_p)$, si $x = \pi(z)$, para todo $y \in M \setminus \{x\}$, se tiene que $|z - x| < |z - y|$. En efecto, fijemos z. Si $y \notin V_\varepsilon(U)$, en particular $y \notin B(p; 3r)$, luego $|z - x| < 2r$ y como $x, z \in B(p; r)$ se tiene que $|x - z| \leq 2r$, de donde se sigue la desigualdad. Si $y \in V_\varepsilon(U) \cap M = U$, como $\overline{U}$ es compacto, existe un $y_0 \in \overline{U}$ más próximo de z, se tiene que $y_0 \in U$, pues de lo contrario $y_0 \notin V_\varepsilon(U)$ y tendríamos que $|z - x| < |z - y_0|$ lo cual no puede ser. De este modo z minimiza $|z - y_0|$, luego $z - y_0 \in T_{y_0}U^\perp = T_{y_0}M^\perp$ y en consecuencia $z \in B^\perp(y_0; \varepsilon)$, entonces como en principio $z \in B^\perp(x; \varepsilon)$, $y_0 = x$ y queda probada nuestra afirmación.

Si V es la reunión de todos los $V_{\varepsilon_p}(U_p)$, con p variando en M, tenemos que la aplicación $\pi : V \to M$ que asigna a cada $x \in V$ el valor $\pi(x)$, que es el único punto de M que minimiza la distancia a z, es de clase C^{k-1}, pues restricta a cada $V_{\varepsilon_p}(U_p)$ lo es. Si consideramos la función continua $\varepsilon(x) : M \to \mathbb{R}^+$ definida por $\varepsilon(x) = d(x, \mathbb{R}^{m+n} \setminus V)$ tenemos que

$$V_\varepsilon(M) := \bigcup_{x\in M} B^\perp(x; \varepsilon(x)) = V \tag{5}$$

□

1.3. Particiones de la unidad

Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n, N \in \mathbb{R}^s$ superficies de dimensión m, n respectivamente ambas de clase C^∞ y $X \subseteq \mathbb{R}^l$.

1.9 Definición. Definimos el *soporte* de una aplicación $f : X \to \mathbb{R}^n$ como el conjunto

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}. \tag{6}$$

1.10 Definición. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un recubrimiento por abiertos de M. Diremos que la familia $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$, de clase C^∞ es una *partición de la unidad* subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para todo $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ en M y $\operatorname{supp} \varphi_i$ es compacto.
2. Para todo $p \in M$, existe una vecindad abierta U de p en M tal que $\operatorname{supp} \varphi_i \cap U = \emptyset$ para todo i salvo para una cantidad finita de índices.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i = 1.$
4. Para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\alpha = \alpha(i) \in I$ tal que $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$.

1.5 Observación. En la anterior definición, debido a la propiedad 2, la suma en 3 esta bien definida.

La existencia de particiones de la unidad, que no será probada en este trabajo, la enunciaremos en el siguiente

Teorema 1.4. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recubrimiento por abiertos de M. Entonces, existe una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.*

Basados en este teorema, mostremos la siguiente

Proposición 1.2. *Sean U, V abiertos de M tales que $M = U \cup V$. Entonces, existen funciones $\varphi_U, \varphi_V : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tales que* $\operatorname{supp} \varphi_\mathrm{U} \subset \mathrm{U}$, *$\operatorname{supp} \varphi_V \subset V$ y $\varphi_U + \varphi_V = 1$ en M.*

Demostración. Sea $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U, V\}$. Consideremos el conjunto $A = \{i \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_i \subset U\}$ y definamos

$$\varphi_U = \sum_{i \in A} \varphi_i \ \text{ y } \ \varphi_V = \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus A} \varphi_i, \tag{7}$$

notemos que $\varphi_U + \varphi_V = 1$, ahora solo nos queda mostrar que $\operatorname{supp} \varphi_U \subset U$ y $\operatorname{supp} \varphi_V \subset V$.

Sea $p \in M$ tal que $\varphi_V(p) \neq 0$, existe $i \in \mathbb{N} \setminus A$ tal que $\varphi_i(p) \neq 0$, luego $\operatorname{supp} \varphi_i \not\subset V$, entonces $\operatorname{supp} \varphi_i \subset V$ y en consecuencia $\operatorname{supp} \varphi_V \subset \overline{V}$.

Veamos que $\operatorname{supp} \varphi_V \cap \partial V = \emptyset$. Supongamos por contradicción que exista $x \in \operatorname{supp} \varphi_V \cap \partial V$. Sabemos que existe una vecindad U_x de x en M que solo corta a una cantidad finita de soportes de las funciones φ_i, llamemos a estas funciones $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}$. Como $x \in \operatorname{supp} \varphi_V$, podemos suponer que existe una sucesión $(x_n)_n \subset U_x$ convergiendo a x tal que $\varphi_V(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por definición de φ_V, existe una sucesión de índices $(i(n))_n \subset \mathbb{N} \setminus A$ tal que $\varphi_{i(n)}(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, más aún por la construcción hecha $(i_n)_n \subset \{\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}\}$, luego si

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_{i(k)} \tag{8}$$

tenemos que K es compacto y además $(x_n)_n \subset K$, entonces $x \in K \subset V$, lo cual es absurdo pues por ser V abierto, $\partial V \cap V = \emptyset$.

Similarmente se muestra que $\operatorname{supp} \varphi_U \subset U$ y la prueba termina. $\square$

Teorema 1.5. *Sea $f : M \to N$ una aplicación continua. Dada cualquier función continua positica $\varepsilon : M \to \mathbb{R}^+$, existe una aplicación $g : M \to N$, de clase C^∞, tal que $\|f(x) - (x)\| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Supongamos inicialmente que $N = \mathbb{R}^s$. Para cada $p \in M$ existe una vecindad U_p en M tal que $\|f(x) - f(p)\| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in U_p$. Sea $\{\varphi_p\}_{p\in M}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_p\}_{p\in M}$. Si definimos $G : M \to \mathbb{R}^s$ por

$$g(x) = \sum_{p\in M} \varphi_p(x) f(p), \tag{9}$$

g es de clase C^∞ y como $f(x) = \sum_{p\in M} \varphi_p(x) f(x)$, tenemos que para todo $x \in M$

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &= \sum_{p\in M} \varphi_p(x) \|f(x) - f(p)\| \qquad (10) \\ &< \sum_{p\in M} \varphi_p(x) \varepsilon(x) = \varepsilon(x). \end{aligned}$$

En el caso general, consideremos $V_\delta(N)$ una vecindad tubular de N. Definamos la función continua $\alpha : M \to \mathbb{R}^+$ por $\alpha(x) = d(f(x), \mathbb{R}^s \setminus V_\delta(N))$, luego si $\|z - f(x)\| < \alpha(x)$, entonces $z \in V_\delta(N)$. Podemos suponer que $\varepsilon(x) < \alpha(x)$ para todo $x \in M$. Por lo que mostramos al principio, existe $g_0 : M \to \mathbb{R}^s$ de clase C^∞ tal que

$$\|g_0(x) - f(x)\| < \frac{1}{2}\varepsilon(x), \tag{11}$$

luego $g_0(x) \in V_\delta(N)$. Como la proyección $\pi : V_\delta(N) \to N$ es de clase C^∞, tenemos que $g = \pi \circ g_0 : M \to N$ también es de clase C^∞ y además

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &\leq \|f(x) - g_0(x)\| + \|g_0(x) - g(x)\| \qquad (12) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon(x) + \frac{1}{2}\varepsilon(x) = \varepsilon(x), \end{aligned}$$

por tanto g es la función que buscamos. □

1.4. Homotopía

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $Z \subseteq \mathbb{R}^s$ y $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto.

1.11 Definición. Diremos que las aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son *homotópicas* y escribiremos $f \simeq g$, si existe una aplicación continua, que llamaremos *homotopía*, $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

1.6 Observación. Respecto a la anterior definición, se verifica que:

1. La relación $f \simeq g$, determina una relación de equivalencia entre las aplicaciones continuas de X en Y.
2. Si $f, \hat{f} : X \to Y$ son homotópicas y si $g, \hat{g} : Y \to Z$ también son homotópicas, entonces $g \circ f \simeq \hat{g} \circ \hat{f}$.

Lema 1.1. *Existe una función $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clase C^∞ tal que:*

1. *$\zeta(t) \in [0, 1]$, para todo $t \in \mathbb{R}$;*
2. *$\zeta(t) = 0$ para $t \leq \frac{1}{3}$ y $\zeta(t) = 1$ para $t \geq \frac{2}{3}$.*

Demostración. Consideremos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\alpha(t) = e^{-1/t(1-t)}$ si $t \in (0,1)$ y $\alpha(t) = 0$ en otro caso. Es sabido que esta función es de clase C^∞, luego consideremos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\beta(t) = \frac{\int_0^t \alpha(s)ds}{\int_0^1 \alpha(s)ds}. \tag{13}$$

Así hemos obtenido β de clase C^∞ con $\beta(t) \in [0,1]$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\beta(t) = 0$ para $t \leq 0$ y $\beta(t) = 1$ para $t \geq 1$. Para hallar ζ bastará definirla por $\zeta(t) = \beta(3t-1)$. $\square$

1.12 Definición. Diremos que la aplicación $F : U \times [0,1] \to Y$ es de *clase* C^k si F admite derivadas parciales continuas hasta de orden k en todos los puntos $(x,t) \in U \times [0,1]$, con la salvedad de que en los puntos de la forma $(x,0)$ y $(x,1)$ las derivadas respecto de t son tomadas a la derecha y a la izquierda, respectivamente.

1.13 Definición. Sean $f, g : U \to Y$ aplicaciones de clase C^k, diremos que f y g son C^k*-homotópicas*, si $H : U \times [0,1] \to Y$ es una homotopía de clase C^∞ entre f y g

Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ una superficie de clase C^l. Generalizemos ahora nuestra última noción de homotopía al caso en que las funciones tengan como dominio a M.

1.14 Definición. Sean $f, g : M \to Y$, diremos que f y g son C^k*-homotópicas* $(k \leq l)$ y escribiremos $f \simeq_k g$, si existe $H : M \times [0,1] \to Y$ homotopía entre f, g y además para cualquier $p \in M$ si $\varphi : U_0 \to U$ es una parametrización de p en M se tiene que $H_\varphi : U_0 \times [0,1] \to Y$, definida por $H_\varphi(x,t) = H(\varphi(x),t)$ es de clase C^k.

1.7 Observación. Sean $f, g : M \to Y$ aplicaciones de clase C^k, $H : M \times [0,1] \to Y$ la C^k-homotopía que las relaciona y ζ una función como la del lema 1.1. Tenemos que:

1. La anterior definición no depende de la parametrización de p en M que se tome.

2. Si definimos $K : M \times [0,1] \to Y$ por $K(x,t) = H(x, \zeta(t))$, tenemos que K es una C^k-homotopía entre f y g tal que $K(x,t) = f(x)$ si $t \in [0, 1/3]$ y $K(x,t) = g(x)$ si $t \in [2/3, 1]$. De esta forma podemos considerar a K defininda en $M \times \mathbb{R}$ siendo $K(x,t) = f(x)$ si $t < 0$ y $K(x,t) = g(x)$ si $t > 1$.

3. Una homotopía como la anterior será llamada *homotopía adaptada*. Es fácil ver que K es de clase C^k si vemos a $M \times \mathbb{R}$ como una superficie en $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Al igual que la homotopía que definimos en un inicio, la relación $f \simeq_k g$ define una relación de equivalencia entre las aplicaciones de clase C^k de M en Y. Para demostrar la transitividad, que es la única propiedad a verificar que causa dificultades, es conveniente utilizar homotopías adaptadas.

Teorema 1.6. *Sean $f, g : M \to N$ aplicaciones de clase C^∞ entre las superficies M, N de clase C^∞. Si $f \simeq g$, entonces $f \simeq_\infty g$.*

Demostración. Sea $H : M \times \mathbb{R} \to N$ es una homotopía adaptada entre f y g. Tomemos una vecindad tubular $V_\varepsilon(N)$. Por el teorema 1.5 existe $\hat{H} : M \times \mathbb{R} \to N$ tal que $\|\hat{H}(x,t) - H(x,t)\| < \varepsilon(x)$ para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$. Entonces $\hat{f}, \hat{g} : M \times N$ definidas por $\hat{f}(x) = \hat{H}(x,0)$, $\hat{g}(x) = \hat{H}(x,1)$ son C^∞-homotópicas. Además tenemos que para todo $x \in M$, $\|\hat{f}(x) - f(x)\| < \varepsilon(f(x))$, luego $[f(x), \hat{f}(x)] \subset V_\varepsilon(N)$ y en consecuencia f y $\hat{f}$ son C^∞-homotópicas, similarmente g y $\hat{g}$ son C^∞-homotópicas. El resultado del teorema se deduce por la transitividad de la homotopía. □

1.8 Observación. Usando un argumento similar al de la anterior prueba, podemos mostrar que toda aplicación continua $f : M \to N$ entre las superficies de clase C^∞ M y N es homotópica a una aplicación de clase C^∞ de M a N.

1.15 Definición. Diremos que X e Y tienen el *mismo tipo de homotopía* o que son *homotópicamente equivalentes* si existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $X \to Y$ tales que $f \circ g \simeq Id_N$ y $g \circ f \simeq Id_M$.

1.9 Observación. Si X e Y son superficies de clase C^∞, del teorema 1.6 y de las observaciones 1.6, 1.8 se sigue que no hay pérdida de generalidad si en la anterior definición se consideran a f y g aplicaiones de clase C^∞.

1.16 Definición. Diremos que X es contráctil si es homotópicamente equivalente a un punto.

1.17 Definición. Diremos que $X \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado cuando existe $p \in X$ tal que $[p,x] = \{tp + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset X$ para todo $x \in X$.

1.10 Observación. Notemos que si X es un conjunto estrellado, entonces es homotópicamente equivalene a un punto. En particular todo conjunto convexo es homotópicamente equivalente a un punto.

1.5. Formas alternadas

Consideremos los espacios vectoriales reales $E_1, \ldots, E_r, E$ y F.

1.18 Definición. Diremos que la aplicación $f : E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ es *r-lineal* cuando es lineal separadamente en relación a cada una de sus r variables, es decir cuando para cualesquiera $v_1 \in E_1, \ldots, v_i, w_i \in E_i, \ldots, v_r \in E_r$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene que

$$f(v_1, \ldots, v_i + \lambda w_i, \ldots, v_r) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + \lambda f(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_r)$$

1.1 Notación. Denotaremos por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; F)$ al conjunto de las aplicaciones r-lineales $f : E_1 \times \cdots \times E_r \to F$. Si $E_1 = \cdots = E_r$, lo denotaremos por $\mathcal{L}_r(E; F)$ y si $r = 1$, simplemente escribiremos $\mathcal{L}(E; F)$.

1.11 Observación.

1. Si dotamos a $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; F)$ con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales, $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_r; F)$ se torna un espacio vectorial.
2. Si $F = \mathbb{R}$, llamaremos formas r-lineales a las aplicaciones r-linelaes y si $r = 1$, $\mathcal{L}(E; \mathbb{R}) = E^*$, el espacio dual de E. Así las funcionales lineales son formas 1-lineales.

1.19 Definición. Sean $f_1, \dots, f_r \in E^*$, el *producto tensorial* de estas funcionales es la forma r-lineal $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r \in \mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$, definida por

$$f(v_1, \dots, v_r) = f_1(v_1) \cdot \ldots \cdot f_r(v_r). \tag{14}$$

Sea $\{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ una base y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset E^*$ su base dual. Para r fijo y cada secuencia $(s) = (i_1, \dots, i_r)$ de números en $I_n = \{1, \dots, n\}$, hagamos $\bar{e}_{(s)} = \bar{e}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \bar{e}_{i_r}$, el conjunto de estas formas r-lineales compone una base del espacio vectorial $\mathcal{L}_r(E; \mathbb{R})$. En particular si $\dim E = n$, entonces $\dim \mathcal{L}_r(E; \mathbb{R}) = n^r$.

1.20 Definición. Sea la aplicación r-lineal $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$. Diremos que f es:

1. *Alternada* si $f(v_1, \dots, v_r) = 0$ siempre que existan $i, j \in I_r$ distintos tales que $v_i = v_j$.
2. *Antisimétrica* cuando para cualesquiera $v_1, \dots, v_r \in E$ se tiene que

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r)$$

1.12 Observación. 1. Un fácil cálculo muestra que toda forma antisimétrica es alternada y recíprocamente, toda forma alternada es antisimétrica.

2. El conjunto de aplicaciones r-lineales antisimétricas (o alternadas) es un espacio vectorial.
3. Si $v_1, \dots, v_r \in E$ son vectores linealmente dependientes, entonces

$$f(v_1, \dots, v_r) = 0 \tag{15}$$

para cualquier $f \in \mathfrak{A}_r(E; F)$.

1.2 Notación. Denotaremos por:

1. $\mathfrak{A}_r(E; F)$ al conjunto de todas las aplicaciones r-lineales $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ alternadas (o lo que es lo mismo, antisimétricas), cuando $F = \mathbb{R}$ escribiremos $\mathfrak{A}_r(E)$.
2. $\mathfrak{A}(E)$ al conjunto de las funcionales lineales E^*.

1.21 Definición. Sea E un espacio vectorial de dimensión n. El *producto exterior* de r funcionales lineales $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{A}(E)$ es la forma r-lineal alternada $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \in \mathfrak{A}_r(E)$ definida por

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(v_1, \dots, v_r) = \det[f_i(v_j)] \tag{16}$$

1.13 Observación. Vemos lo siguiente:

1. Se sigue directamente del hecho de ser el determinante una forma lineal alternada que $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ es, efectivamente, una forma r-lineal alternada. Más aún la aplicación $\Lambda : \mathfrak{A}(E) \times \cdots \times \mathfrak{A}(E) \to \mathfrak{A}_r(E)$ definida por $\Lambda(f_1, \dots, f_r) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$, es r-lineal alternada.
2. Sea $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathfrak{A}(E)$ una base. Si $r \leq n$, para cada $I = \{i_1 < i_1 < \cdots < i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ consideramos $f_I = f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_r}$, el conjunto de las formas f_I costituye una base de $\mathfrak{A}_r(E)$, se sigue de esto que $\dim \mathfrak{A}_r(E) = \binom{n}{r}$.

3. Si $r > n = \dim E$, toda forma $f \in \mathfrak{A}_r(E; F)$ verifica que $f(v_1, \ldots, v_r) = 0$, para cualesquiera $v_1, \ldots, v_r \in E$, pues r vectores en un espacio de dimensión $n < r$ son linealmente dependientes. En particular tenemos que $\dim \mathfrak{A}_r(E) = 0$.

En adelante consideremos la transformación lineal $A : E \to F$.

1.22 Definición. Para $r \geq 0$, definimos la *transformación lineal inducida* $A^* : \mathfrak{A}_r(F) \to \mathfrak{A}_r(E)$ por $(A^*f)(v_1, \ldots, v_r) = f(Av_1, \ldots, Av_r)$ si $f \in \mathfrak{A}_r(F)$ y $v_1, \ldots, v_r \in E$. La forma A^*f es llamada *pullback* de la forma f mediante A.

Proposición 1.3. *La transformación lineal $A^* : \mathfrak{A}_r(F) \to \mathfrak{A}_r(E)$ preserva el producto exterior de funcionales lineales, es decir, se tiene que*

$$A^*(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r) = A^*f_1 \wedge \cdots \wedge A^*f_r \tag{17}$$

para cualesquiera $f_1, \ldots, f_r \in F^*$.

Demostración. En efecto, si tomamos $v_1, \ldots, v_r \in E$, tenemos que

$$\begin{aligned} A^*(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(v_1, \ldots, v_r) &= (f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(Av_1, \ldots, Av_r) \\ &= \det[f_i(Av_j)] \\ &= \det[A^*f_i(v_j)] \\ &= (A^*f_1 \wedge \cdots \wedge A^*f_r)(v_1, \ldots, v_r). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4. *Existe una única aplicación bilineal $\varphi : \mathfrak{A}_r(E) \times \mathfrak{A}_s(E) \to \mathfrak{A}_{r+s}(E)$ tal que*

$$\varphi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r, g_1 \wedge \cdots \wedge g_s) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_s$$

para cualesquiera fuancionales lineales $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in E^*$

1.3 Notación. Para $f \in \mathfrak{A}_r(E)$ y $g \in \mathfrak{A}_s(E)$ denotaremos por $f \wedge g := \varphi(f, g)$.

1.14 Observación. Sean $A^* : \mathfrak{A}_r(F) \to \mathfrak{A}_r(E)$ y $A^* : \mathfrak{A}_s(F) \to \mathfrak{A}_s(E)$, que por abuso de notación serán ambas nombradas por A^*, las transformaciones inducidas por A. Para $f \in \mathfrak{A}_r(E)$, $g \in \mathfrak{A}_s(E)$ y $h \in \mathfrak{A}_t(E)$ se verifica:

1. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.
2. $A^*(f \wedge g) = A^*f \wedge A^*g$.

1.6. Formas diferenciales

A lo largo de esta sección M y N serán una superficie m-dimensional y l-dimensional de $\mathbb{R}^n$y $\mathbb{R}^r$, respectivamente, ambas de clase C^k.

1.23 Definición. Diremos que ω es una *forma diferencial* de grado r en M si ω hace corresponder a cada $x \in M$ una forma r-lineal alternada $\omega(x) \in \mathfrak{A}_r(T_xM)$.

1.15 Observación. Sea ω una forma diferencial de grado r en M, tenemos que:

1. Para $r = 0$ asumiermos por convensión que $\omega = f : M \to \mathbb{R}$ es una función real de clase C^k.

2. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, una forma diferencial de grado r en U es una aplicación $\omega : U \to \mathfrak{A}_r(\mathbb{R}^n)$.

3. Si $\{dx_1, \ldots, dx_n\} \subset \mathfrak{A}(R^n)$ es la base dual de la base cannónica de $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, \ldots, e_n\}$, consideremos para cada $I = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subseteq I_n$ la forma $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$. Para cada $x \in U$, tenemos que

$$\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx_I. \tag{18}$$

4. Si los los $a_I : U \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^k, diremos que ω es una forma de clase C^k.

1.24 Definición. Sea $f : M \to N$ una aplicación de clase C^k $(k \geq 1)$, para cada forma diferencial ω de grado r en N diremos que la forma diferencial de grado r en M $f^*\omega$, definida por

$$(f^*\omega) \cdot (w_1, \ldots, w_r) = \omega(f(x)) \cdot (f'(x)w_1, \ldots, f'(x)w_r) \tag{19}$$

para todo $x \in M$ y cualesquiera $w_1, \ldots, w_r \in T_xM$, es el *pullback* de ω por f.

1.16 Observación. Para $r = 0$, si $\omega = g$ es una forma diferencial de grado 0 en N, tenemos que $f^*\omega = g \circ f : M \to \mathbb{R}$.

Proposición 1.5. *Sea P una superficie de clase C^k. Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son aplicaciónes de clase C^k $(k \geq 1)$, para cualesquiera formas de grado r $\omega, \bar{\omega}$ en N y $\hat{\omega}$ en P se verifica:*

1. *$f^*(a\omega + \bar{\omega}) = af^*\omega + f^*\bar{\omega}$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, es decir $\omega \mapsto f^*\omega$ define una transformación lineal.*

2. *$f^*(\omega \wedge \bar{\omega}) = f^*\omega \wedge f^*\bar{\omega}$.*

3. *$(g \circ f)^*\hat{\omega} = f^*(g^*\hat{\omega})$.*

1.4 Notación. Si $\varphi : U_0 \to U \subseteq M$ es una parametrización local en M. En cada punto $x = \varphi(u)$, denotaremos por $\{du_1, \ldots, du_m\} \subset (T_xM)^*$ a la base dual de

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial}{\partial u_m}(u) \right\} \subset T_xM. \tag{20}$$

En las situación anterior, para $I = \{i_1 < \cdots < i_r\} \in I_m$, las formas diferenciales $du_I = du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}$ son una base de $\mathfrak{A}_r(T_xM)$, luego toda forma diferencial ω de grado r en M se expresa en función de φ, como

$$\omega(x) = \sum_I a_I(u) du_I, \quad x = \varphi(u) \tag{21}$$

en estas condiciones tenemos la siguiente

1.25 Definición. Definimos la *diferencial exterior* de la forma ω como $d\omega$ definida por

$$d\omega(x) = \sum_I da_I(u) \wedge du_I, \quad x = \varphi(u)$$

1.17 Observación. Respecto a la anterior definición:

1. Ésta no depende de la parametrización $\varphi : U_0 \to U$ de x en M que se tome.

2. Recordemos que si tenemos $f : M \to \mathbb{R}$, df es una forma diferencial de grado 1 definida por

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_i}(u) du_i \tag{22}$$

donde $\varphi(u) = x$ para cierta parametrización $\varphi : U_0 \to U$ de x en M.

Teorema 1.7. *Sean $f : M \to N$ y $\omega, \bar{\omega}$ formas diferenciales en N. Entonces:*

1. $d(\omega \wedge \bar{\omega}) = d\omega \wedge \bar{\omega} + (-1)^{gr(\omega)} \wedge d\bar{\omega}$*;*

2. $d(d\omega) = 0$*;*

3. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$*.*

1.18 Observación. El conjunto de las formas diferenciales de clase C^k y grado r sobre M es un espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.

1.5 Notación. Denotaremos por $\Lambda^r(M)$ al espacio vectorial de las formas de clase C^∞ y grado r sobre M.

Así tenemos que la diferencial exterior es una transformación lineal $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ al igual que $f^* : \Lambda^r(N) \to \Lambda^r(M)$.

1.26 Definición. Sea $\omega \in \Lambda^r(M)$. Diremos que ω es:

1. *Cerrada* si $dw = 0$.

2. *Exacta* cuando existe $\alpha \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $d\alpha = \omega$ (para esto supondremos que $r \geq 1$).

1.19 Observación. Se sigue de la definición y el teorema 1.7 que:

1. Todas las formas cerradas en $\Lambda^r(M)$ son el núcleo de $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$, y todas las formas exactas en $\lambda^r(M)$ son la imágen de $d : \Lambda^{r-1}(M) \to \Lambda^r(M)$.

2. Toda forma exacta es cerrada.

1.6 Notación. Denotaremos por $Z^r(M)$ y $B^r(M)$ a los subespacios vectoriales de $\Lambda^r(M)$ formados por las formas cerradas y exactas, respectivamente.

1.7. Secuencias exactas

Sea A un anillo conmutativo con unidad.

1.27 Definición. Sean F, G y H tres A-módulos y $f : F \to G$, $g : G \to H$ homomorfismos. Diremos que el diagrama:

$$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$$

es una secuencia de orden 2 en G o simplemente diremos que es *semiexacta* si $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(g)$. En particular si $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$, diremos que la secuencia es *exacta* e G (o simplemente diremos que es exacta).

1.20 Observación. Decir que la secuencia $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ es semiexacta, es equivalente a afirmar que $g \circ f = 0$.

Extenderemos ahora la noción de exactitud a secuencias infinitas de A-módulos.

1.28 Definición. Sea $\{\dots, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, \dots\}_{i\in I}$ una familia, posiblemente infinita numerable, de A-módulos, y $\{f_i : M_i \to M_{i+1}\}_{i\in I}$ una familia de homomorfismos. Diremos que el diagrama:

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \tag{23}$$

es una secuencia *exacta* si $M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$ es axacta en M_i para todo $i \in I$.

1.7 Notación. Sea $F \xrightarrow{f} G$

1. Si f es inyectiva, escribiremos $0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} G$ y
2. Si f es sobreyectica, escribiremos $F \xrightarrow{f} G \longrightarrow 0$.

Proposición 1.6. *Consideremos una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita*

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{k-2}} V_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0\ . \tag{24}$$

Entonces la suma alternada de las dimensiones de los espacios V_i es cero.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre k. Si $k = 2$, f_1 es un isomorfismo y en consecuencia $\dim(V_1) - \dim(V_2) = 0$. Supongamos que el teorema es cierto para k, y consideremos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \xrightarrow{f_k} V_{k+1} \longrightarrow 0\ . \tag{25}$$

Hagamos $\hat{V}_2 = V_2/\ker(f_2) = V_2/\mathrm{Im}(f_1)$ y definamos $\hat{f}_2 : \hat{V}_2 \to V_3$ por $\hat{f}_2([x]) = f_2(x)$, entonces la secuencia

$$0 \longrightarrow \hat{V}_2 \xrightarrow{\hat{f}_2} V_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \xrightarrow{f_k} V_{k+1} \longrightarrow 0\ . \tag{26}$$

es exaca pues $\mathrm{Im}(\hat{f}_2) = \mathrm{Im}(f_2) = \ker(f_3)$ y además si $\hat{f}_2([x]) = 0$, entonces $f_2(x) = 0$, luego $x \in \ker(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$, entonces existe $x' \in V_1$ tal que $f_1(x') = x$ y en consecuencia $[x] = 0$. De este modo, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\dim(\hat{V}_2) - \dim(V_3) + \cdots + (-1)^{k+1}\dim(V_{k+1}) = 0, \tag{27}$$

finalmente, observando que $\dim(\hat{V}_2) = \dim(V_2) - \dim(\mathrm{Im}(f_1)) = \dim(V_2) - \dim(V_1)$ y reemplazando en (27) se concluye.

□

2. Cohomología de deRham

2.1. Primeras definiciones

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^∞.

2.1 Definición. Definimos el *complejo de deRham* como la sucesión de espacios vectoriales siguiente

$$\cdots \xrightarrow{d} \Lambda^{r-1}(M) \xrightarrow{d} \Lambda^r(M) \xrightarrow{d} \Lambda^{r+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots, \tag{28}$$

donde ponemos $\Lambda^r(M) = \{0\}$ para todo $r < 0$.

2.1 Observación. Teniendo en cuenta que un espacio vectorial es un módulo, por el teorema 1.7, el complejo de deRham es una secuencia semiexacta, esto es, $d \circ d = 0$.

Como mencionamos en la observación 1.19, tenemos que $B^r(M) < Z^r(M)$, esto nos permite hacer la siguiente

2.2 Definición. Definimos el *r-ésimo grupo de cohomología* como

$$H^r(M) := \frac{Z^r(M)}{B^r(M)}, \tag{29}$$

su dimensión es llamado el *r-ésimo número de Betti* de M.

2.2 Observación. De hecho como $B^r(M)$ es un subespacio de $Z^r(M)$, tenemos que $H^r(M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2.1 Ejemplo. Para $r > m$, $H^r(M) = \{0\}$. En efecto, pues de la observación 1.13 se sige que $\Lambda^r(M) = 0$ para $r > m$, y por tanto $B^r(M) = Z^r(M) = \Lambda^r(M) = \{0\}$.

2.2 Ejemplo. Si M tiene k componentes conexas, $H^0(M) \cong \mathbb{R}^k$. Pues si $f \in \Lambda^0(M)$, que $f \in Z^0(M)$ quiere decir que $df = 0$, luego se deduce que las funciones constantes en cada componente conexa constituyen a $Z^0(M)$, luego $Z^0(M) \cong \mathbb{R}^k$. Por otro lado tenemos que $B^0(M) = \{0\}$ pues $\Lambda^{-1}(M) = \{0\}$, de este modo $H^0(M) = Z^0(M) \cong \mathbb{R}^k$.

2.3 Ejemplo. $H^1(\mathbb{R}) = \{0\}$. En efecto, si $\omega \in Z^1(\mathbb{R}) = \Lambda^1(\mathbb{R})$, entonces $\omega = f\,dx$ para alguna funcion diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si consideramos la 0-forma diferencial α, definida por $\alpha(x) = \int_0^x f(s)ds$, tenemos que $d\alpha(x) = \alpha'(x)\,dx = \omega(x)$, por tanto $\omega \in B^1(\mathbb{R})$.

2.2. Invarianza por homotopías

A lo largo de esta sección M y N serán una superficie m-dimensional y l-dimensional de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^s$, respectivamente, ambas de clase C^∞.

Si $f : M \to N$ es de clase C^∞, sabemos que se induce una transformación lineal $f^* : \Lambda^r(N) \to \Lambda^r(M)$ para todo r. En estas condiciones tenemos la siguiente

Proposición 2.1. *Para todo r se verifica que $f^*(Z^r) \subset Z^r(M)$ y $f^*(B^r(N)) \subset B^r(M)$.*

Demostración. En efecto, si $\omega \in Z^r(N)$ y $d\omega = 0$, de acuerdo al teorema 1.7 tenemos que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$, luego $f^*\omega \subset Z^r(M)$. Similarmente si $\omega \in B^r(N)$, $\omega = d\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda^{r-1}(N)$, luego si $\beta = f^*\alpha \in \Lambda^{r-1}(M)$, tenemos que $f^*\omega = f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha) = d\beta$, así $f^*\omega \in B^r(M)$. □

De este modo f^* induce un homomorfismo de grupos que continuaremos llamando $f^* : H^r(N) \to H^r(M)$ definido por $f^*([\omega]) = [f^*\omega]$. La buena definición de f^* se da por que si $\omega' = \omega + d\alpha$, con $\alpha \in H^{r-1}(N)$, tenemos que $f^*(\omega') = f^*(\omega + d\alpha) = f^* + d(f^*\alpha)$, de donde se sigue que $[f^*\omega'] = [f^*\omega]$. Que $f^* : H^r(N) \to H^r(M)$ sea homomorfismo es consecuencia de que $f^* : \Lambda^r(N) \to \Lambda^r(M)$ es lineal.

2.3 Observación. Se sigue de la proposición 1.5 y la definición de f^* que:

1. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,
2. Si $M = N$, $(Id_M)^* = Id_{H^r(M)}$.

En particular si M y N son difeomorfas, existe $f : M \to N$ difeomorfismo, luego $Id_{H^r(M)} = (f^{-1})^* \circ f^*$ y $Id_{H^r(N)} = f^* \circ (f^{-1})^*$, así f^* es un isomorfismo de grupos y por tanto $H^r(M) \cong H^r(N)$. Este hecho es generalizado en gran medida como consecuencia del siguiente

Teorema 2.1. *Si $H : M \times [0,1] \to N$ es una homotopía de clase C^∞ entre $f, g : M \to N$, entonces*

$$f^* = g^* : H^r(N) \to H^r(M) \tag{30}$$

Demostración. Supongamos inicialmente que $U = M$ sea abierto. Para cada $t \in \mathbb{R}$ consideremos la aplicación $i_t : U \to U \times \mathbb{R}$ definida por $i_t(x) = (x, t)$. Notemos además que toda forma $\omega \in \Lambda^r(U \times \mathbb{R})$ se escribe de manera única como $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$ donde ni

$$\alpha = \sum_I a_I dx_I \in \Lambda^{r-1}(U \times R) \ \text{ ni } \ \beta = \sum_J b_J dx_I \in \Lambda^r(U \times R)$$

contienen al dt. Luego si definimos $K : \Lambda^r(U \times \mathbb{R}) \to \Lambda^{r-1}(U)$ por

$$(K\omega)(x) = \int_0^1 \alpha(x,t)dt = \sum_I \left(\int_0^1 a_I(x,t)dt \right) dx_I \tag{31}$$

tenemos que, en virtud de la linealidad de la integral, K es una transformación lineal.

Afirmamos que, para todo $\omega \in \Lambda^r(U \times \mathbb{R})$ se tiene que

$$K\, d\omega + d\, K\, \omega = i_1^*\, \omega - i_0^*\, \omega. \tag{32}$$

En efecto, se tiene que

$$d\alpha = \sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I + dt \wedge \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial t} dx_I$$

y

$$d\beta = \sum_{J,k} \frac{\partial b_J}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_J + dt \wedge \sum_J \frac{\partial a_J}{\partial t} dx_J,$$

luego

$$\begin{aligned} d\omega &= d(dt\wedge\alpha+\beta) \\ &= -dt\wedge d\alpha + d\beta \\ &= dt\left(-\sum_{I,j}\frac{\partial a_I}{\partial x_j}\wedge dx_I + \sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t}dx_J\right) + \frac{\partial b_J}{\partial x_k}dx_k\wedge dx_J, \end{aligned}$$

entonces

$$K(d\omega) = \sum_J\left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t}dt\right)dx_J - \sum_{I,j}\left(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_j}dt\right)dx_j\wedge dx_I$$

y

$$d(K\omega) = \sum_{I,j}\left(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_j}dt\right)dx_j\wedge dx_I,$$

por tanto

$$\begin{aligned} K\,d\omega + d\,K\,\omega &= \sum_J\left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t}dt\right)dx_J \\ &= \sum_J [b_J(x,1)-b_J(x,0)]dx_J \\ &= i_1^*\,\omega - i_0^*\,\omega, \end{aligned}$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Definamos ahora $L:\Lambda^r(N)\to\Lambda^{r-1}(U)$ por $L=K\circ H^*$, para todo $\omega\in\Lambda^r(N)$ tenemos que L es una transformación lineal pues K y H^* lo son, además

$$\begin{aligned} L(d\omega)+d(L\omega) &= K(H^*d\omega)+d[K(H^*\omega)] \\ &= K[d(H^*\omega)]+d[K(H^*\omega)] \\ &= i_1^*(H^*\omega)-i_0^*(H^*\omega) \\ &= (H\circ i_1)^*\omega-(H\circ i_0)^*\omega \\ &= g^*\omega-f^*\omega \end{aligned}$$

de donde se sigue que para $\omega\in Z^r(N)$, $L(d\omega)+d(L\omega)=L(0)+d(L\omega)=d(L\omega)$, es decir $g^*\omega-f^*\omega\in B^r(U)$.

Para el caso general, en el que M es una superficie de clase C^∞, el teorema 1.3 nos asegura la existencia de una vecindad tubular $U=V_\varepsilon(M)$ de M, consideremos $\pi:U\to M$ la proyección e $i:M\to U$ la inclusión, si $\hat{H}:M\times\mathbb{R}\to N$ es una homotopía de clase C^∞ entre f y g, que existe por la observación 1.7, entonces $\bar{H}:U\times\mathbb{R}\to N$, definida por $\bar{H}(x,t)=\hat{H}(\pi(x),t)$, es una homotopía de clase C^∞ entre $\bar{f}=f\circ\pi$ y $\bar{g}=g\circ\pi$.

Por lo mostrado inicialmente para $\omega\in Z^r(N)$, $\bar{g}^*\omega-\bar{f}^*\omega\in B^r(U)$, es decir, existe $\bar{\alpha}\in\Lambda^{r-1}(U)$ tal que $\bar{g}^*\omega-\bar{f}^*\omega=d\bar{\alpha}$. Luego si $\alpha=i^*\bar{\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned} g^*\omega-f^*\omega &= (\bar{g}\circ i)^*\omega-(\bar{f}\circ i)^*\omega \\ &= i^*(\bar{g}^*\omega-\bar{f}^*\omega) \\ &= d(i^*\bar{\alpha}) \\ &= d\alpha \end{aligned}$$

en consecuencia $g^*\omega=f^*\omega+d\alpha$, de donde se sique que $[g^*\omega]=[f^*\omega+d\alpha]=[f^*\omega]$ y por tanto $f^*=g^*:H^r(N)\to H^r(M)$. □

Veamos ahora algunas consecuencias de este teorema.

Corolario 2.1. *Sean M y N superficies con el mismo tipo de homotopía, entonces $H^r(M) \cong H^r(N)$.*

Demostración. En efecto, tenemos que existen $f : M \to N$ y $g : N \to M$ aplicaiones de clase C^∞ tales que $f \circ g \simeq Id_N$ y $f \circ g \simeq Id_N$, luego $g^* \circ f^* = Id_{H^r(N)}$ y $f^* \circ g^* = Id_{H^r(N)}$, por tanto $f^* : H^r(N) \to H^r(M)$ es un isomorfismo. □

Corolario 2.2 (Invarianza por homeomorfismos)**.** *Si $f : M \to N$ es un homeomorfismo, entonces $H^r(M) \cong H^r(N)$.*

Demostración. Por la observación 1.8, existen $g_1 : M \to N$ y $g_2 : N \to M$ de clase C^∞ tales que $f \simeq g_1$ y $f^{-1} \simeq g_2$, luego $Id_M = f^{-1} \circ f \simeq g_2 \circ g_1$, por el teorema 1.6, podemos suponer que $Id_M \simeq_\infty g_2 \circ g_1$, similarmente tenemos que $Id_N \simeq_\infty g_1 \circ g_2$. Por tanto, debido al corolario 2.1, se concluye que $H^r(M) \cong H^r(N)$. □

Corolario 2.3. *Si M es contráctil, entonces para todo $r > 0$, $H^r(M) = \{0\}$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del corolario 2.1. □

2.4 Observación. En particular si M es estrellada, entonces $H^r(M) = \{0\}$.

Corolario 2.4 (Lema de Poincaré)**.** *Toda forma cerrada de grado mayor que cero en una superficie M es localmente exacta.*

Demostración. Sean $p \in M$ y $\varphi : U_0 \to U \subset M$ su parametrización en M, podemos suponer que U_0 es un abierto convexo, en particular es contráctil y como φ es un difeomorfismo de clase C^∞ se deduce que $H^r(U) = H^r(U_0) = \{0\}$, luego toda forma exacta $\omega \in \Lambda^r(U)$ es cerrada o lo que es lo mismo, toda $\omega \in Z^r(M)$ restringida a U es cerrada. □

Corolario 2.5. *Para cualquier $n > 0$, $H^r(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^r(\mathbb{S}^{n-1})$.*

Demostración. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y consideremos $f : M \to \mathbb{S}^{n-1}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ e $i : \mathbb{S}^{n-1} \to M$ la inclusión. Entnonces $f \circ g = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ y $H : M \times [0,1] \to M$ definida por $H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$ es una homotopía entre $g \circ f$ e $Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$, luego M y $\mathbb{S}^{n-1}$ tienen el mismo tipo de homotopía y por tanto, debido al corolario 2.1, $H^r(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H^r(\mathbb{S}^{n-1})$.

□

2.3. Secuencia de Mayer-Vietoris

Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie de dimensión m y clase C^∞ y U, V abiertos de M tales que $U \cup V = M$. Si $i_U : U \to M$, $i_V : V \to M$, $j_U : U \cap V \to U$ y $j_V : U \cap V \to V$ son las respectivas inclusiones, para todo $r \geq 0$ definimos las aplicaciones

$$\Lambda^r(M) \xrightarrow{F_r} \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V) \xrightarrow{G_r} \Lambda^r(U \cap V) \tag{33}$$

por

$$F_r(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = (i_U^*\omega, i_V^*\omega), \quad G_r(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U\cap V} - \omega_2|_{U\cap V} = j_U^*\omega_1 - j_V^*\omega_2.$$

Claramente $G_r \circ F_r = 0$, pues

$$G_r \circ F_r(\omega) = G_r(\omega|_U, \omega|_V) = (\omega|_U)|_{U\cap V} - (\omega|_V)|_{U\cap V} = \omega|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V} = 0,$$

luego $\mathrm{Im}(F_r) \subseteq \ker(G_r)$. Recíprocamente si $G_r(\omega_1, \omega_2) = 0$, podemos definir $\omega \in \Lambda^r(M)$ por

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) \text{ si } x \in U \\ \omega_2(x) \text{ si } x \in V \end{cases} \tag{34}$$

y tenemos que $F_r(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$. Luego $\mathrm{Im}(F_r) = \ker(G_r)$ y por tanto la secuencia (33) es exacta, más aún tenemos la siguiente

Proposición 2.2. *La secuencia*

$$0 \longrightarrow \Lambda^r(M) \xrightarrow{F_r} \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V) \xrightarrow{G_r} \Lambda^r(U\cap V) \longrightarrow 0 \tag{35}$$

es exacta.

Demostración. Solo nos falta ver la exactitud en $\Lambda^r(M)$ y en $\Lambda^r(U \cap V)$.

Si $\omega \in \Lambda^r(M)$ es tal que $F_r(\omega) = (0,0)$, $\omega|_U, \omega|_V = 0$, luego $\omega = 0$ y la exactidud en $\Lambda^r(M)$ esta probada.

Veamos la exactitud en $\Lambda^r(U \cap V)$. Sea $\omega \in \Lambda^r(U \cap V)$, consideremos una partición de la unidad $\{\varphi_U, \varphi_V\}$ subordinada a $\{U, V\}$ como en la proposición 1.2 y definamos ω_1 en U y ω_2 en V por

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \begin{cases} \varphi_V(x)\omega(x) & \text{si} \quad x \in U\cap V \\ 0 & \text{si} \quad x \in U \setminus \mathrm{supp}\,\varphi_\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{y} \\ \omega_2(x) &= \begin{cases} -\varphi_U(x)\omega(x) & \text{si} \quad x \in U\cap V \\ 0 & \text{si} \quad x \in V \setminus \mathrm{supp}\,\varphi_\mathrm{U} \end{cases} \quad , \end{aligned} \tag{36}$$

luego como $U \cap V$ y $U \setminus \mathrm{supp}\,\varphi_V$ son abiertos de U que recubren a U, se deduce que $\omega_1 \in \Lambda^r(U)$, similarmnte vemos que $\omega_2 \in \Lambda^r(V)$. Entonces tenemos que

$$G_r(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U\cap V} - \omega_2|_{U\cap V} = (\varphi_V\omega)|_{U\cap V} + (\varphi_U\omega)|_{U\cap V} = \omega \tag{37}$$

lo que concluye la prueba. □

Lema 2.1. *para F_r y G_r definidas como antes, el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^r(M) \arrow[r, "F_r"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V) \arrow[r, "G_r"] \arrow[d, "d\oplus d"] & \Lambda^r(U\cap V) \arrow[d, "d"] \\ \Lambda^{r+1}(M) \arrow[r, "F_{r+1}"] & \Lambda^{r+1}(U) \oplus \Lambda^{r+1}(V) \arrow[r, "G_{r+1}"] & \Lambda^{r+1}(U\cap V) \end{tikzcd} \tag{38}$$

Demostración. La prueba es una comprobación directa. □

La secuencia (33) induce la secuencia

$$H^r(M) \xrightarrow{F^*} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{G^*} H^r(U \cap V) \tag{39}$$

mediante $F^*[\omega] = ([i_U^*\omega], [i_V^*\omega])$ y $G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [G_r(\omega_1, \omega_2)]$. Un cálculo directo muestra que F^* y G^* son homomorfismos bien definidos y que la secuencia (39) es semiexacta. Veamos a continuación que podemos conectar cada línea como (39) con una similar de un grado superior mediante un homomorfismo de conección.

Teorema 2.2. *Para todo $r \geq 0$ existe un homomorfismo de grupos $\Delta : H^r(U \cap V) \to H^{r+1}(M)$ tal que la sucesión*

$$0 \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{F^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{G^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} \cdots \tag{40}$$

$$\cdots \longrightarrow H^r(M) \xrightarrow{F^*} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{G^*} H^r(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H^m(M) \xrightarrow{F^*} H^m(U) \oplus H^m(V) \xrightarrow{G^*} H^m(U \cap V) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $F^*[\omega] = ([i_U^*\omega], [i_V^*\omega])$ y $G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [G_r(\omega_1, \omega_2)]$.

Demostración. Hagamos la prueba en los siguientes pasos

- *Definición de Δ:* Sea $[\omega] \in H^r(U \cap V)$ con $\omega \in Z^r(U \cap V)$, como G_r es sobre, existen $\omega_1 = \Lambda^r(U)$ y $\omega_2 \in \Lambda^r(V)$ tales que $G_r(\omega_1, \omega_2) = \omega$. Además tenemos que

  $$0 = d\omega = (d \circ G_r)(\omega_1, \omega_2) = G_{k+1}(d\omega_1, d\omega_2) \tag{41}$$

  luego $(d\omega_1, d\omega_2) \in \ker(G_{r+1}) = \mathrm{Im}(F_{r+1})$, luego existe $\eta \in \Lambda^{r+1}(M)$ tal que $F_{r+1}(\eta) = (d\omega_1, \omega_2)$. Por otro lado como

  $$(F_{r+2} \circ d)(\eta) = (d \oplus d)(F_{r+1}(\eta)) = (d \oplus d)(d\omega_1, d\omega_2) = 0 \tag{42}$$

  y F_{r+2} es inyectiva, $d\eta = 0$, luego η es cerrada, de este modo definimos $\Delta : H^r(U \cap V) \to H^{r+1}(M)$ por

  $$\Delta([\omega]) = [\eta]. \tag{43}$$

  Veamos que nuestra definición es buena, para esto consideremos $\omega' = \omega + d\alpha$ con $\alpha \in \Lambda^{r-1}(U \cap V)$, por ser G_{r-1} sobre, existen $\alpha_1 \in \Lambda^{r-1}(U)$ y $\alpha_2 \in \Lambda^{r-1}(V)$ tales que $\alpha = G_{r-1}(\alpha_1, \alpha_2)$. Además como hicimos para ω, existen $\omega_1' = \Lambda^r(U)$ y $\omega_2' \in \Lambda^r(V)$ tales que $G_r(\omega_1', \omega_2') = \omega'$. También $(d\omega_1', d\omega_2') \in \ker(G_{r+1}) = \mathrm{Im}(F_{r+1})$ y en consecuencia existe $\eta' \in \Lambda^{r+1}(M)$ cerrada tal que $F_{r+1}(\eta') = (d\omega_1', d\omega_2')$. Por otro lado tenemos que

  $$\begin{aligned} G_r(\omega_1' - \omega_1, \omega_2' - \omega_2) &= \omega' - \omega = d\alpha \\ &= (d \circ G_{r-1})(\alpha_1, \alpha_2) = G_r(d\alpha_1, d\alpha_2) \end{aligned} \tag{44}$$

entonces $(\omega_1' - \omega_1 - d\alpha_1, \omega_2' - \omega_2 - d\alpha_2) \in \ker(G_r) = \mathrm{Im}(F_r)$, así existe $\theta \in \Lambda_r(M)$ tal que $(\omega_1' - \omega_1 - d\alpha_1, \omega_2' - \omega_2 - d\alpha_2) = F_r(\theta)$. Luego como

$$\begin{aligned} F_{r+1}(\eta' - \eta) &= F_{r+1}(\eta') - F_{r+1}(\eta) \\ &= (d\omega_1' - d\omega_1, d\omega_2' - d\omega_2) \\ &= (d\omega_1' - d\omega_1 - (d \circ d)(\alpha_1), d\omega_2' - d\omega_2 - (d \circ d)(\alpha_2)) \\ &= (d \circ F_r)(\theta) = F_{r+1}(d\theta) \end{aligned} \tag{45}$$

de la inyectvidad de F_{r+1} se deduce que $\eta' - \eta = d\theta$ y por tanto $[\eta'] = [\eta]$ lo que prueba la buena definición de Δ.

Ahora veamos la exactitud de la secuencia (40):

- *Exactitud en $H^0(M)$:* Sea $[f] \in H^0(M)$ tal que $F^*([f]) = 0$, entonces $F_0(f) = (d\omega_1, d\omega_2)$ para $\omega_1 \in \Lambda^{-1}(U) = \{0\}$ y $\omega_2 \in \Lambda^{-1}(V) = \{0\}$, luego $F_0(f) = (d0, d0) = (0, 0)$ y como F_0 es inyectiva concluimos que $f = 0$ y en consecuencia $[f] = 0$.

- *Exactitud en $H^r(U) \oplus H^r(V)$ para $0 \leq r \leq m$:* Sabemos que la secuencia (40) es semiexacta en $H^r(U) \oplus H^r(V)$, solo nos falta ver que $\ker(G^*) \subseteq \mathrm{Im}(F^*)$. Sea entonces $([\omega_1], [\omega_2]) \in \ker(G^*)$ con $\omega_1 \in Z^r(U)$ y $\omega_2 \in Z^r(V)$, como $0 = [G(\omega_1, \omega_2)] \in H^r(U \cap V)$, existe $\alpha \in \Lambda^{r-1}(U \cap V)$ tal que $G_r(\omega_1, \omega_2) = d\alpha$. De la sobreyectividad de G_{k-1} deducimos la existencia de $(\alpha_1, \alpha_2) \in H^{r-1}(U) \oplus H^{r-1}(V)$ tal que $G_{r-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha$, luego

  $$G_r(d\alpha_1, d\alpha_2) = (d \circ G_{r-1})(\alpha_1, \alpha_2) = d\alpha = G_r(\omega_1, \omega_2), \tag{46}$$

  entonces $(d\alpha_1 - d\alpha_1, d\alpha_2 - d\alpha_2) \in \ker(G_k) = \mathrm{Im}(F_k)$. Así, existe $\eta \in \Lambda^r(M)$ tal que $F_r(\eta) = (d\alpha_1 - d\alpha_1, d\alpha_2 - d\alpha_2)$, además como

  $$F_{r+1}(d\eta) = (d \oplus d)(F_r(\eta)) = (d\omega_1, d\omega_2) = (0, 0) \tag{47}$$

  de la inyectividad de F_{r+1} deducimos que η es exacta, en consecuencia $[\eta] \in H^r(M)$ y además

  $$F^*([\eta]) = ([\omega_1 - d\alpha_1], [\omega_2 - d\alpha_2]) = ([\omega_1], [\omega_2]), \tag{48}$$

  por tanto $([\omega_1], [\omega_2]) \in \mathrm{Im}(F^*)$.

- *Exactitud en $H^r(U \cap V)$:* Sea $([\omega_1], [\omega_2]) \in H^r(U) \oplus H^r(V)$. Si

  $$[\omega] = G^*([\omega_1], [\omega_2]), \tag{49}$$

  entonces $\Delta([\omega]) = [\eta]$ donde $\eta \in Z^{r+1}(M)$ verifica $F_{r+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2) = (0, 0)$. Luego $\eta = 0$, en consecuencia $(\Delta \circ G^*)([\omega_1], [\omega_2]) = [\eta] = 0$. Por tanto $(\mathrm{Im})(\mathrm{G}^*) \subseteq \ker(\Delta)$.

  Recíprocamente, tomemos $[\omega] \in H^r(U \cap V)$ tal que

  $$\Delta([\omega]) = 0 \in H^{r+1}(M). \tag{50}$$

  Sabemos que $\Delta([\omega]) = [\eta]$ con $\eta \in Z^{r+1}(M)$ tal que $F_{r+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$, donde $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V)$ satisfacen que $G_r(\omega_1, \omega_2) = \omega$. De (50), deducimos que η es exacta, luego existe $\theta \in \Lambda^r(M)$ tal que $d\theta = \eta$. Si $F_k(\theta) = (\omega_1', \omega_2')$ tenemos que

$$\begin{aligned} (d \oplus d)(\omega_1', \omega_2') &= [(d \circ d) \circ F_r](\theta) = F_{r+1}(d\theta) \\ &= F_{r+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2), \end{aligned} \tag{51}$$

luego $d\omega_1' = d\omega_1$ y $d\omega_2' = d\omega_2$, entonces $(\omega_1 - \omega_1', \omega_2 - \omega_2') \in Z^r(U) \oplus Z^r(V)$. Así, $([\omega_1 - \omega_1'], [\omega_2 - \omega_2']) \in H^r(U) \oplus H^r(V)$ y tenemos que

$$\begin{aligned} G^*([\omega_1 - \omega_1'], [\omega_2 - \omega_2']) &= [G_r(\omega_1 - \omega_1', \omega_2 - \omega_2')] \\ &= [G_r(\omega_1, \omega_2) - G_r(\omega_1', \omega_2')] \\ &= [G_r(\omega_1, \omega_2) - (G_r \circ F_r)(\theta)] \\ &= [G_r(\omega_1, \omega_2)] = [\omega], \end{aligned} \tag{52}$$

de donde concluimos que $[\omega] \in \mathrm{Im}(G^*)$ y por tanto $\ker(\Delta) \subseteq \mathrm{Im}(G^*)$.

- *Exactitud en $H^{r+1}(M)$:* Sea $[\omega] \in H^r(U \cap V)$, entonces $\Delta([\omega]) = [\eta]$ con $\eta \in Z^{r+1}(M)$ tal que $F_{r+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$, donde $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V)$ satisfacen que $G_r(\omega_1, \omega_2) = \omega$. Como

$$(F^* \circ \Delta)([\omega]) = F^*([\eta]) = ([d\omega_1], [d\omega_2]) = (0, 0), \tag{53}$$

se tiene que $F^* \circ \Delta = 0$ y por tanto $\mathrm{Im}(\Delta) \subseteq \ker(F^*)$.

Recíprocamente, si $[\eta] \in H^{r+1}(M)$ es tal que $F^*([\eta]) = (0, 0)$, $F_{r+1}(\eta)$ es de la forma $F_{r+1}(\eta) = (\omega_1', \omega_2')$ con ω_1', ω_2' exactas, luego existe $(\omega_1, \omega_1) \in \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V)$ tal que $d\omega_1 = \omega_1'$ y $d\omega_2 = \omega_2'$. Si $\omega = G_r(\omega_1, \omega_2)$, entonces $\omega \in Z^r(U \cap V)$ pues

$$\begin{aligned} d\omega &= (d \circ G_r)(\omega_1, \omega_2) = G_{r+1}(d\omega_1, d\omega_2) \\ &= G_{r+1}(\omega_1', \omega_2') = G_{r+1}(F_{r+1}(\eta)) = 0, \end{aligned} \tag{54}$$

luego $[\omega] \in H^r(U \cap V)$. Además como $F_{r+1}(\eta) = (\omega_1', \omega_2') = (d\omega_1, d\omega_2)$, se deduce que $\Delta([\omega]) = [\eta]$ y por tanto $\ker(F^*) \subseteq \mathrm{Im}(\Delta)$.

- *Exactiud en $H^m(U \cap V)$:* Sea $[\omega] \in H^m(U \cap V)$, como G_m es sobreyectiva, existe $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^m(U) \oplus \Lambda^m(V) = Z^m(U) \oplus Z^m(V)$ tal que $G_m(\omega_1, \omega_2) = \omega$, luego $G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [\omega]$ y por tanto G^* es sobreyectiva.

□

2.4. Cohomología de la esfera y algunas aplicaciones

Usemos la sucesión de Mayer-Vietoris para determinar la cohomología de la esfera.

Teorema 2.3. *La cohomología de deRham de la esfera $\mathbb{S}^m$ esta dada por*

$$H^0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{R}^2 \text{ y } H^r(\mathbb{S}^m) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad r = 0, m \\ \{0\} & si \quad 0 < r < m. \end{cases} \tag{55}$$

Demostración. Sean $p = (1, 0, \ldots, 0)$, $q = -p$ y consideremos los abiertos de $\mathbb{S}^m$ $U = \mathbb{S}^m \setminus \{p\}$ y $V = \mathbb{S}^m \setminus \{q\}$. Tenemos que $U \cup V = \mathbb{S}^m$, U y V son difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, $U \cap V$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, luego teniendo presente el corolario 2.5 se deduce que

$$H^r(U) \cong H^r(V) \cong H^r(\mathbb{R}^m) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \text{si} & r = 0 \\ \{0\} & \text{si} & 0 < r \leq m. \end{array} \right. \tag{56}$$

y

$$H^r(U \cap V) \cong H^r(\mathbb{S}^{m-1}), \tag{57}$$

luego la sucesión de Mayer-Vietoris asociada es

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, equal] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, equal] & H^0(\mathbb{S}^{m-1}) \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "F^*"] & H^0(U) \oplus H^0(V) \arrow[r, "G^*"] & H^0(U \cap V) \arrow[r, "\Delta"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \{0\} \arrow[d, equal] & & \\
{} \arrow[r, "\Delta"] & H^1(\mathbb{S}^m) \arrow[r, "F^*"] & H^1(U) \oplus H^1(V) \arrow[r, "G^*"] & H^1(U \cap V) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{r-1}(U) \oplus H^{r-1}(V) \arrow[r, "G^*"] \arrow[d, equal] & H^{r-1}(U \cap V) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
 & \{0\} & H^{r-1}(\mathbb{S}^{m-1}) &
\end{tikzcd} \tag{58}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\Delta"] & H^r(\mathbb{S}^m) \arrow[r, "F^*"] & H^r(U) \oplus H^r(V) \arrow[r, "G^*"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
 & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

De las dos últimas lineas de (58) podemos deducir que para $k > 1$, $H^r(\mathbb{S}^m) \cong H^{r-1}(\mathbb{S}^{m-1})$ y de las dos primeras lineas de (58) deducimos que para $m \geq 1$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{F^*} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G^*} H^0(\mathbb{S}^{m-1}) \xrightarrow{\Delta} H^1(\mathbb{S}^m) \longrightarrow 0 \tag{59}$$

es exacta. Entonces si $m = 1$, $\mathbb{S}^{m-1} = \{-1, 1\}$, luego $H^0(\mathbb{S}^{m-1}) \cong \mathbb{R}^2$ y aplicando la proposición 1.6 concluimos que $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$. Si $m > 1$, $\mathbb{S}^{m-1}$ es conexa, luego $H^0(\mathbb{S}^{m-1}) \cong \mathbb{R}$ y nuevamente por la proposición 1.6 deducimos que $H^1(\mathbb{S}^m) = \{0\}$.

Así, $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$, $H^1(\mathbb{S}^m) \cong \{0\}$ para $m > 1$ y $H^1(\mathbb{S}^1) \cong H^r(\mathbb{S}^m) \cong H^{r-1}(\mathbb{S}^{m-1})$. (55) se sigue de aplicar inducción matemática. $\square$

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente

Corolario 2.6. *Si $n \neq m$, entonces $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{S}^m$ no tienen el mismo tipo de homotopía, en particular no son homeomorfos.*

Corolario 2.7 (Invarianza de la dimensión)**.** *$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos si, y sólo si, $n = m$.*

Demostración. Evidentemente si $n = m$ $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos. Recíprocamente, supongamos por contradicción que $n \neq m$ y que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sea un homeomorfismo, entonces

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{h(0)\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \tag{60}$$

pero como $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{m-1}$, tendríamos que $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{S}^{m-1}$ tienen el mismo tipo de homotopía, lo cual es absurdo.

□

3. Dualidad de Alexander

3.1. Teorema de dualidad de Alexander

Antes de probar el resultado pincipal de esta sección veamos los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Si F_1, $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ son cerrados homeomorfos, entonces $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2$ y $\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}$ son homeomorfos.*

Demostración. Sea $\phi : F_1 \to F - 2$ homeomorfismo y $\psi : F_2 \to F_1$ su inversa. Por el teorema de extensiónde Tietze, existen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ extensiones continuas de Φ y Ψ, respectivamente. Definamos $h, k : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ por

$$h(x, y) = (x, y - \Phi(x)) \quad \text{y} \quad k(x, y) = (x - \Psi(y), y), \tag{61}$$

un simple cálculo muestra que h y k son homeomorfismos, más precisamente $h^{-1}(x, y) = (x, y + \Phi(x))$ y $k(x, y) = (x + \Psi(y), y)$. Además como para $x \in F_1$ tenemos que $h^{-1}(x, 0) = (x, \Phi(x)) = (x, \phi(x))$, se sigue que

$$k \circ h^{-1}(x, 0) = (x - \Psi\phi(x), \phi(x)) = (0, \phi(x)), \tag{62}$$

luego $k \circ h^{-1}$ transforma $F_1 \times \{0\}$ en $\{0\} \times F_2$. Similarmente se tiene que $h \circ k^{-1}$ transforma $\{0\} \times F_2$ en $F_1 \times \{0\}$. Por tanto $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2$ y $\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}$ son homeomorfos. □

Lema 3.2. *Si $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, entonces*

$$\begin{aligned} H^r(\mathbb{R}^n \setminus F) &\cong H^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\}) \quad \textit{para } r \geq 1, \\ H^0(\mathbb{R}^n \setminus F)/\hat{\mathbb{R}} &\cong H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\}) \quad \textit{y} \\ \mathbb{R} &\cong H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\}), \end{aligned} \tag{63}$$

donde $\hat{\mathbb{R}}$ representa al espacio de funciones constantes.

Demostración. Sean $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \notin F \;\;\vee\;\; t > 0\}$ y $V = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \notin F \;\;\vee\;\; t < 0\}$. Se tiene que U y V son contráctiles, $U \cap V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\}$ y además $U \cap V = (\mathbb{R}^n \setminus F) \times \mathbb{R}$ tiene la misma homotopía que $\mathbb{R}^n \setminus F$. Luego tenemos que

- *Si $r \geq 1$:* Haciendo $A^r = H^r(U) \oplus H^r(V)$, la secuencia de Mayer-Vietoris asociada es

$$\begin{tikzcd} A^r \arrow[r, "G^*"] \arrow[d, equal] & H^r(\mathbb{R}^n \setminus F) \arrow[r, "\Delta"] & H^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\}) \arrow[r, "F^*"] & A^{r+1} \arrow[d, equal] \\ \{0\} & & & \{0\} \end{tikzcd} , \tag{64}$$

  en consecuencia Δ es un isomorfismo y concluimos que $H^r(\mathbb{R}^n \setminus F) \cong H^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\})$.

- *Si $r = 0$:* Teniendo en cuenta que $H^1(U) \oplus H^1(V) \cong 0$, la secuencia de Mayer-Vietoris asociada es

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n \setminus F) \xrightarrow{F^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{G^*} \quad , \tag{65}$$

$$\xrightarrow{G^*} H^0(\mathbb{R}^n \setminus F) \xrightarrow{\Delta} H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F \times \{0\}) \longrightarrow 0$$

  si tomamos $(a,b) \in H^0(U) \oplus H^0(V)$, tenemos que a y b son funciones constantes, luego $G^*(a,b) = a - b$ es una función constante. Deducimos que $\dim \mathrm{Im}(G^*) = 1$, en consecuencia

$$\ker(\Delta) = \mathrm{Im}(G^*) = \hat{\mathbb{R}} \tag{66}$$

  de donde se tiene que

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus F)/\hat{\mathbb{R}}. \tag{67}$$

  Finalmente como $\dim \mathrm{Im}(F^*) = \dim \ker(G^*) = 1$ se deduce que $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F) \cong \mathbb{R}$.

□

Teorema 3.1 (Dualidad de Alexander)**.** *Si F_1, $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ son cerrados homeomorfos, entonces para todo $r \geq 0$*

$$H^r(\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cong H^r(\mathbb{R}^n \setminus F_2).$$

Demostración. Aplicando sucesivamente el lema 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} H^r(\mathbb{R}^n \setminus F_1) &\cong \ldots \cong H^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}) \;\; (\text{si } r \geq 1), && (68)\\ H^r(\mathbb{R}^n \setminus F_2) &\cong \ldots \cong H^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_2 \times \{0\}) \;\; (\text{si } r \geq 1), && (69)\\ H^0(\mathbb{R}^n \setminus F_1)/\hat{\mathbb{R}} &\cong \ldots \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}) \;\; \text{y} \\ H^0(\mathbb{R}^n \setminus F_2)/\hat{\mathbb{R}} &\cong \ldots \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_2 \times \{0\}). \end{aligned}$$

Además por el lema 3.1 tenemos que $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}$, pero $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n} \setminus F_2 \times \{0\}$, luego por por el corolario 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} H^r(\mathbb{R}^n \setminus F_1) &\cong H^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}) \cong H^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2) \\ &\cong H^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_2 \times \{0\}) \cong H^r(\mathbb{R}^n \setminus F_2) \end{aligned} \tag{70}$$

para $r \geq 1$, y

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}^n \setminus F_1)/\hat{\mathbb{R}} &\cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1 \times \{0\}) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \times F_2) \\ &\cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_2 \times \{0\}) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus F_2)/\hat{\mathbb{R}} \end{aligned} \tag{71}$$

de donde se sigue el resultado.

□

3.2. Teorema de Jordan-Brouwer

Proposición 3.1. *Para todo conjunto $\mathcal{C}$ homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}$ tiene dos componentes conexas.*

Demostración. Del teorema de Dualidad de Alexander se deduce que $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}) \cong H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n)$, y debido a que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ tiene dos componentes conexas, $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, por tanto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}$ tiene dos componentes conexas. □

Teorema 3.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imágen, entonces $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $x \in U$, tomemos la bola $B = B_x$ tal que $x \in B$ y $\overline{B} \subset U$, entonces tenemos que si $S = \partial B$, como B y S son disjuntos, se verifica la igualdad

$$\mathbb{R}^n = f(B) \sqcup f(S) \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{B})) \tag{72}$$

donde las anteriores son uniones disjuntas, luego $\mathbb{R}^n \setminus f(S) = f(B) \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{B}))$. Por la proposición 3.1 $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ tiene dos componentes conexas. Tenemos que $f(B)$ es conexo, por ser la imagen de un conexo vía una aplicación continua, además, por el teorema 3.1, el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{B})$ esta obligado a ser conexo, y como $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ es abierto, se deduce que $\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{B})$ y $f(B)$ son abiertos conexos en $\mathbb{R}^n$, por tanto

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f(B_x) \tag{73}$$

es abierto. □

Finalicemos este trabajo mostrando el siguiete teorema.

Teorema 3.3 (Teorema de Jordan-Brouwer)**.** *Sea $\mathcal{C}$ homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}$ tiene dos componentes conexas las cuales tienen frontera común igual a $\mathcal{C}$.*

Demostración. La primera parte de este teorema fué probada en la proposición 3.1, veamos entonces la parte faltante. Sean A y B las componentes conexas de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}$. tomemos $x \in \mathcal{C}$ y W una vecindad abierta de x en $\mathbb{R}^n$ y tomemos la vecindad abierta $V = W \cap \mathcal{C}$ de x en $\mathcal{C}$. Entonces tenemos que $K = \mathcal{C} \setminus V$

es homeomorfo a un subconjunto propio L, cerrado de $\mathbb{S}^n$, como evidentemente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$ es conexo, por el teorema 3.1 tenemos que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ también es conexo y como es abierto, es conexo por caminos. Tomemos ahora $a \in A$, $b \in B$ y $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ un camino que los una, con $\lambda(0) = a$ y $\lambda(1) = b$. Necesariamente λ pasa por V (de otro modo $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}$ sería conexo) más precisamente $R = V \cap \lambda = \mathcal{C} \cap \lambda \neq \emptyset$ es compacto. Ahora consideremos

$$\begin{aligned} t_a &= \text{mín}\{t : \lambda(t) \in R\} \text{ y} \\ t_b &= \text{máx}\{t : \lambda(t) \in R\}, \end{aligned} \tag{74}$$

tenemos que para $t < t_a$, $\lambda(t) \in A$ y para $t > t_b$, $\lambda(t) \in B$. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda(t_a - \varepsilon, t_a) \subset W$, en particular $W \cap A \neq \emptyset$. Del mismo modo se concluye que $W \cap B \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{C}$ pertenece a la frontera de A y B y como la unión $\mathbb{R}^{n+1} = A \sqcup B \sqcup \mathcal{C}$ es disjunta, concluimos que $\partial A = \partial B = \mathcal{C}$. $\square$

3.1 Observación. Para $n = 1$ tenemos el resultado clásico del teorema de la curva de Jordan.

4. Conclusiones

- El teorema de Invarianza por Homotopías nos dice que los grupos de cohomología solo dependen del tipo de homotopía de la superficie, en particular el corolario de Invarianza por Homomorfismos, nos dice que los grupos de cohomología son invariantes topológicos.
- El teorema de Dualidad de Alexander, nos ayuda a comparar cohomologías de superficies, conociendo solo relaciones topológicas entre son complementos. Como consecuencia de esto tenemos el teorema de Jordan-Brouwer.
- En resumen la Cohomología es una fuerte herramienta que nos permite obtener resultados de carácter topológico usando herramientas analíticas y algebraicas, como por ejemplo el resultado de invarianza de la dimensión que obtuvimos como consecuencia de determinar la cohomología de la esfera y los resultados ya mencionados.

5. Referencias Bibliográficas

[1] I. Madsen, J. Tornehave *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press, 1997.

[2] E. L. Lima *Análise real, vol. 3*, Coleçao Matemática Universitaria, IMPA, 2008.

[3] E. L. Lima *Introducción a la Cohomología de deRham*, Monografías del IMCA, Lima, 2001.

[4] E. L. Lima *Curso de Análise, vol. 2*, Proyecto Euclides, IMPA, 2006.

[5] E. L. Lima *Álgebra exterior*, Coleçao Matemática Universitaria, IMPA, 2005.

[6] M. P. do Carmo *Differential Forms and Applications*, Springer-Velarg, Germany, 1994.