

MECÁNICA ESTADÍSTICA NO  
EXTENSIVA: APLICACIÓN A LAS  
TEORÍAS DE CAMPOS

---

Luis Javier Tarrío Barreiro

**Programa de Docencia Avanzada**

Tutor: Luis Miguel Varela Cabo

*Universidade de Santiago de compostela*

# Mecánica estadística no extensiva: aplicación a las teorías de campos

*Programa de Docencia Avanzada*

Autor: Luis Javier Tarrío Barreiro

Tutor: Luis Miguel Varela Cabo

18 de julio de 2006

## Resumen

La mecánica estadística extensiva resulta insuficiente para ciertos sistemas. C. Tsallis propuso una generalización no extensiva. Se presenta una introducción al formalismo general y algunas de las aplicaciones previamente publicadas, con un énfasis especial en la aplicación a teorías de campos.

En el presente trabajo se introduce el modelo de Ising como modelo canónico que sirva de guía para presentar las teorías estadística y cuántica de campos. Se hace hincapié en las similitudes de los formalismos para ambas teorías de campos. En la teoría estadística se introduce una generalización para obtener una mecánica estadística no extensiva, relacionada con los conceptos de invarianza de escala y universalidad, a través de la estadística de Levy y la entropía de Tsallis. Se propone generalizar las teorías cuánticas de campos basándose en la mecánica estadística no extensiva aquí explicada.

## Introducción

El objetivo de este trabajo será relacionar la teoría cuántica de campos con la mecánica estadística no extensiva surgida recientemente a partir de la propuesta para la generalización de la entropía dada por Constantino Tsallis. Para ello partiremos del modelo de Ising, ya que es un modelo que tiene solución analítica en el caso bidimensional y, sin embargo, posee una transición de fase. Se puede recurrir a diferentes estrategias para el estudio a mayores dimensiones del sistema e introducir así algunos conceptos como pueden ser la invarianza de escala, la universalidad, el grupo de renormalización o las leyes potenciales. Posteriormente se hará una generalización al continuo del modelo de Ising y se hará la conexión con la teoría cuántica de campos. Una vez realizada dicha conexión, se ahondará en la propuesta para mecánica estadística no extensiva a partir de la expresión para la entropía dada por Tsallis y de las distribuciones estables de Levy, herramienta estadística necesaria entender el comportamiento del sistema. Finalmente se explicarán algunos estudios que ya se han realizado con la mecánica estadística no extensiva y la teoría cuántica de campos, aunque esta relación está aún en ciernes y tiene que ser desarrollada en los próximos años para que comience a dar frutos.

El estudio de sistemas con interacciones cuyo rango es del orden del propio tamaño del sistema, sistemas que poseen memorias temporales largas o que presentan características fractales no se puede realizar de forma satisfactoria mediante la mecánica estadística convencional. Hizo falta el desarrollo de una mecánica estadística generalizada a partir de una nueva definición de entropía para tratar estos sistemas y comenzar a entender la física presente en sus procesos.

Con esta expresión se generaliza también la mecánica estadística, ya que al extremar dicha entropía sujeta a unas restricciones, también generalizadas. Al desarrollar la teoría se descubre que esta mecánica estadística no es extensiva. Es de esta cualidad de donde surge el interés, pues éste es el primer y más necesario paso para una generalización de la mecánica estadística a sistemas complejos. Como se ha dicho, esta generalización se ha aplicado recientemente al estudio del gas ideal [1], el oscilador armónico [2] o la interacción hadrónica [3].

Recientemente se está comenzando a aplicar este formalismo a los sistemas nucleares, como se verá más adelante en este artículo, explicando la materia hadrónica como compuesta por constituyentes que siguen una distribución estadística puramente no extensiva.

Para el estudio de sistemas físicos a menudo se hace la suposición de que el formalismo estadístico con el que estamos trabajando para el estudio de dicho sistema es extensiva, es decir, cantidades tales como la energía o la entropía son proporcionales al volumen del sistema. Del mismo modo, si unimos dos sistemas en un solo “macrosistema”, según la mecánica estadística convencional la energía (y lo mismo ocurre para la entropía) del nuevo sistema no será más que la suma de las energías de los dos sistemas precursores.

Una de las maneras usuales para obtener la distribución de probabilidad extensiva de los microestados del sistema consiste en tomar la definición de Boltzmann-Gibbs-Shannon de la entropía

$$S = -k \sum p_i \ln p_i \quad (1)$$

y maximizarla (siguiendo la propuesta hecha por Edwin Jaynes en 1957) sujeta a ciertas restricciones (suponemos conocidos valores esperados de características del sistema, como, por ejemplo, la energía media del mismo en el caso de la colectividad canónica). Cuando interpretamos los multiplicadores de Lagrange presentes en esa derivación se encuentran cantidades intensivas conjugadas a nuestras restricciones (como la temperatura, conjugada de la energía).

Para la colectividad canónica conocemos  $\sum p_i = 1$  (normalización de las distribuciones de probabilidad) y  $\sum p_i E_i = \langle E \rangle$  (valor de la energía interna del sistema). Según lo propuesto por Jaynes los valores  $p_i$  se pueden encontrar minimizando  $L[p_i] = S[p_i] - \mu \sum p_i - \nu \sum p_i E_i$ . Con cálculo de variaciones básico se llega a

$$p_i = e^{-1 - \frac{\mu}{k}} e^{-\frac{\nu}{k} E_i} = \frac{e^{-\frac{E_i}{kT}}}{Z}, \quad (2)$$

donde  $Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$  se deduce a partir de la condición de normalización y  $\nu = 1/T$  se encuentra mediante la relación termodinámica  $\frac{\partial S}{\partial \langle E \rangle} = T^{-1}$ .

Vemos que mediante este procedimiento uno encuentra las bien conocidas distribuciones de probabilidad exponenciales (propias de la estadística gaussiana, ya que su varianza es  $\sigma \propto kT$ , finita para toda temperatura finita), que

constituyen la base de la mecánica estadística extensiva en las aplicaciones realizadas hasta la fecha y han dado una gran cantidad de resultados correctos en sistemas con interacciones de corto alcance.

Esta hipótesis de extensividad parece adecuada (por lo menos para el caso de la energía) para sistemas con interacciones de corto alcance, como las uniones moleculares en la química o las fuerzas intermoleculares presentes en los cuerpos macroscópicos convencionales, pero falla cuando nos encontramos ante fenómenos con interacciones de largo alcance comparado con el tamaño del propio sistema. Este es el caso de la gravedad, sistemas complejos, tales como transiciones de fase o fenómenos críticos o sistemas pequeños (nano o mesoscópicos). En estos casos la extensividad del sistema resulta no ser una característica válida en absoluto a la hora de realizar el estudio del mismo, ya que existen correlaciones de larga distancia entre las partes del sistema que acoplan todos los grados de libertad del mismo.

En este último caso, Tsallis postuló una forma generalizada para la entropía

$$S = \frac{k}{q-1} \left( 1 - \sum_i p_i^q \right), \quad (3)$$

que recupera BG como caso particular  $q \rightarrow 1$ , siendo  $q$  un parámetro cuyo significado se explica más adelante.

Al realizar la operación de maximización de la entropía generalizada de Tsallis sujeta a las nuevas restricciones, se encuentran distribuciones de probabilidad polinómicas (exponenciales cuando  $q \rightarrow 1$ , como no podía ser de otro modo). La importancia de estas distribuciones potenciales radica en que son fundamentales para la explicación propiedades estadísticas de sistemas con interacciones de largo alcance en el sistema y aparecen de modo natural las estadísticas de Lévy, que son procesos estables con momentos de la distribución infinitos, de importancia vital en sistemas con correlaciones de alto rango. Estas leyes potenciales en la variable aleatoria son de gran importancia en sistemas con invarianza de escala (como la fractalidad), típicamente asociadas a sistemas complejos.

En este trabajo lo primero que se hará será introducir el modelo de Ising. Tomamos este modelo como punto de partida ya que a pesar de presentar una ruptura espontánea de simetría y describir una transición de fase de segundo orden es bastante simple (posee soluciones analíticas en el caso bidimensional). Podremos ver qué estrategias se han seguido para intentar describir esta transición de fase y centrarnos, en la siguiente sección, en una de ellas. Esta estrategia que veremos más a fondo se trata del paso al continuo del modelo de Ising y la conexión existente entre la teoría estadística de campos y la teoría cuántica de campos. Se verá que ambos formalismos son equivalentes y, por tanto, el estudio de uno de ellos implica el estudio del otro.

Veremos cómo el modelo de Ising nos lleva, a través de las teorías estadísticas y cuánticas de campos, a la estadística no extensiva ayudándonos de la transición de fase presente en el modelo. En la siguiente sección introduciremos las estadísticas de Lévy, en donde se verá más claro qué son los procesos estables y por qué la estadística gaussiana es la única que posee momentos de orden superior finitos. La introducción de esas estadísticas es necesaria pues surgen de modo natural en la generalización de la mecánica estadística de BG propuesta por Constantino Tsallis, que será la siguiente parte de este trabajo; allí se verá las implicaciones que esta generalización tiene para la mecánica estadística y se

darán algunos resultados para sistemas que ya se han analizado en el marco de este formalismo.

Finalmente se presenta un resumen de la recientemente introducida [3] relación entre la mecánica estadística no extensiva y la teoría cuántica de campos, mostrando así que la relación entre ambas teorías (que es lo que se intenta explicar en este trabajo) está comenzando a extenderse en la literatura.

## Modelo de Ising

En esta sección se introduce un modelo discreto muy empleado en la mecánica estadística debido a Ising. Este modelo resulta de aplicación en un gran número de estudios, ya que permite estudiar una enorme variedad de problemas (como ejemplos se pueden tomar el ferromagnetismo, el gas en una red o el estudio de aleaciones binarias, esbozadas en [4]; también tiene aplicaciones fuera de la física como en el estudio de comportamiento de animales, comportamiento social o redes neuronales). Este modelo, además, se puede generalizar a un modelo continuo, como se verá en la siguiente sección, abriéndonos las puertas para las teorías estadísticas de campos, que, como se verá, son análogas a las teorías cuánticas de campos.

Este modelo permite introducir conceptos muy importantes acerca de los temas que se van a tratar (como las funciones o la longitud de correlación) y ha sido uno de los modelos que mejor se ha estudiado debido a que permite encontrar una solución analítica para casos de dimensionalidad baja (típicamente  $< 3$ ), presentando a su vez una transición de fase en el caso  $d = 2$ . Se trata de un modelo cuasi canónico en la mecánica estadística y se utiliza, pues, para fijar conceptos. Aquí se explica en el contexto de los materiales ferromagnéticos.

Un material ferromagnético (la mayoría de los metales) es un material que puede presentar magnetización espontánea aún en ausencia un campo magnético externo. Todos hemos imantado alguna vez un trozo de metal (para fabricar brújulas caseras, por ejemplo) y, sin embargo, sabemos que esta imanación no es inherente a esos mismos metales (es decir, que lo habitual es encontrar dichos materiales sin magnetizar). A temperaturas cotidianas, en ausencia de campos magnéticos externos, la magnetización total de esos materiales es nula. Sin embargo, si bajamos la temperatura, aparece una magnetización espontánea del material por debajo de una temperatura característica llamada temperatura de Curie ( $T_c$ ). Esto se debe a que una fracción de los espines de las moléculas que componen dicho material se alinean para dar lugar a esa imanación. A medida que bajamos más y más la temperatura, un mayor número de espines se alinean aumentando la magnetización del material. Sin embargo, si incrementamos la temperatura por encima de  $T_c$ , nos encontramos con que las fluctuaciones térmicas evitan cualquier magnetización macroscópica de la muestra (entendida como el promedio de la magnetización debida a cada molécula de la misma).

Al llegar a esa temperatura de Curie se encuentra que el calor específico diverge y la magnetización tiene derivada discontinua, es decir, hay una transición de fase entre un estado paramagnético ( $T > T_c$ ) y uno ferromagnético ( $T < T_c$ ). Es en el estudio del sistema en las inmediaciones de este punto donde se va a centrar este trabajo, ya que ahí es donde presenta dificultades la aplicación de la mecánica estadística BG.

El modelo de Ising ([4], [5]) surge del hamiltoniano más simple que se puede

escribir para un material cristalino con  $N$  espines situados en los nodos de una red a los que consideramos variables y que tenga en cuenta la interacción entre ellos; así, para el caso en el que el campo externo es nulo, tenemos

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} \varepsilon_{ij} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j, \quad (4)$$

donde  $\vec{\sigma}_i$  son las matrices de Pauli,  $\varepsilon_{ij}$  es la constante de acoplamiento y  $H$  es conocido como hamiltoniano de interacción de Heisenberg.

Este modelo, sin embargo, es complicado de resolver en dimensión general y por eso se hacen necesarias algunas simplificaciones adicionales. En primer lugar consideramos que los efectos cuánticos no son importantes y pasamos de las matrices de Pauli a una variable  $\vec{S}_i$  cuyo módulo es fijo (y por lo tanto lo podemos normalizar redefiniendo la constante  $\varepsilon_{ij}$ ),  $|\vec{S}_i| = 1$ . La siguiente simplificación consiste en eliminar el carácter vectorial de nuestra variable y convertirlo en un escalar  $s_i$  que puede tomar los valores  $\pm 1$  para simbolizar que el espín está orientado en una posición o en la contraria. Por último consideramos una interacción isótropa, que en nuestro modelo corresponde con una constante de acoplamiento igual para todos los espines  $\varepsilon_{ij} = J$ .

En presencia de un campo magnético externo  $B$  tenemos que el hamiltoniano del modelo es

$$H = -B \sum_{i=1}^N s_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, \quad (5)$$

donde el primer sumando da cuenta de la interacción de cada espín con el campo magnético externo y el segundo de la interacción entre los espines de la red ( $J > 0$  es la energía de interacción). En este modelo se considera que esta segunda interacción es de corto alcance (debido a que es una interacción de intercambio) y por lo tanto sólo los espines más próximos interaccionan entre sí, lo que se indica mediante la notación  $\langle i,j \rangle$ .

Se puede probar [4] a través de la función de partición extensiva usual  $Z = \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_N} \exp(-H/kT)$  y la expresión  $M = -\frac{1}{kT} \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial B} \right|_{B=0}$  que la expresión para la magnetización es [4]

$$M = \left\langle \sum_i s_i \right\rangle. \quad (6)$$

Para sistemas en una sola dimensión se puede resolver el modelo analíticamente y se observa que no existe ninguna transición de fase. Algo más interesante sucede al resolver el caso bidimensional. Onsager llevó a cabo esta tarea y encontró que, efectivamente, existe la transición de fase paramagnético-ferromagnético a una temperatura de Curie (en ausencia de campo externo) dada por [5]

$$\sinh \left( \frac{2J}{kT_c} \right) = 1. \quad (7)$$

El análisis mediante técnicas tales como el estudio del grupo de renormalización (que se explica más adelante) o aproximaciones de campo medio (en donde se considera sólo un espín de la red, sobre el que actúa un promedio del campo creado por los demás espines, ignorando así posibles fluctuaciones) es necesario a la hora del estudio del sistema cuando se trabaja en dimensión  $D > 2$ , debido a la inexistencia de soluciones analíticas conocidas.

Es en los casos con transición de fase (como éste y otros de dimensión superior) donde la mecánica estadística convencional deja de funcionar de forma correcta; esto lo veremos con la relación existente entre la correlación de los espines a largas distancias y la magnetización espontánea. Recordemos que nuestro modelo sólo permite interacciones entre los espines más cercanos, sin embargo se encuentra que por debajo de una temperatura concreta los espines empiezan a colaborar entre sí, mostrando correlaciones de más larga distancia, que dan lugar a bloques mayores que las celdas de la red original donde el espín promedio no es ni mucho menos nulo, sino que posee un cierto valor. De este modo [6], se forman regiones mayores, una especie de “macrocelas”, cuyas celdas constituyentes (es decir, el valor de sus espines) están correlacionadas entre sí y, de forma aproximada, son independientes de las “macrocelas” vecinas. Surge así de modo natural la idea de renormalización: fabricar un modelo de Ising equivalente al original cuando nos vamos acercando a la temperatura de Curie, pero redefiniendo la constante de acoplamiento  $J$ , la temperatura del sistema (recordemos, conjugada del hamiltoniano) y el valor  $s_i$  de las celdas.

Esto se hizo a partir de las ideas de Widom y Kadanoff [7], quienes demostraron que a medida que nos acercamos a la temperatura de Curie (es decir, cuando  $T - T_c \rightarrow 0$ ) propiedades tales como el calor específico del sistema o la longitud de correlación divergen con una ley polinómica. Es esta forma de diverger la que hace fallar a la mecánica estadística de BG; ésta siempre da unas divergencias exponenciales debido a que trata con sistemas cuyas fluctuaciones son mínimas, pero cuando nos acercamos a una transición de fase, estas fluctuaciones en torno a la media (en el ejemplo del modelo de Ising, cómo nos alejamos de una magnetización nula cuando bajamos la temperatura) empiezan a ser cada vez mayores hasta que, superado un punto crítico, ha ocurrido una transición de fase y se llega a un nuevo equilibrio.

Esto se puede entender como una limitación de la mecánica estadística BG ante el aumento de las fluctuaciones del sistema (o lo que es lo mismo, la proximidad de una transición de fase causada por una mayor correlación entre partes lejanas del mismo). En las inmediaciones del punto crítico es donde surge la invarianza de escala (que llevan al estudio del sistema mediante el grupo renormalización) y de ahí se llega a leyes potenciales para los observables físicos, como se comenta más adelante. La razón fundamental estriba en que, a un nivel más fundamental, nos encontramos con el teorema del límite central, que presupone que nuestras variables aleatorias (el valor de  $s_i$ ) tienden a comportarse de acuerdo con una distribución gaussiana a medida que tomamos más número en consideración, siempre que la varianza sea finita.

Sin embargo nos encontramos con un fenómeno conocido como invarianza de escala, esto significa que podemos explorar nuestro sistema en cualquier escala para nuestras variables (intuitivamente es hacer un zoom en nuestras variables para verlas más cerca o más lejos; matemáticamente es introducir un factor de escala  $\lambda$  a todas las variables) y veremos siempre el mismo comportamiento. Cuando esto ocurre, los observables de nuestro sistema son funciones homogéneas de cierto grado (recordemos que una función  $f(x)$  es homogénea de grado  $\alpha$  si  $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ , lo que implica que  $f(x)$  es una función polinómica). Más adelante se hace una comparación entre distribuciones potenciales y distribuciones gaussianas que nos mostrarán por qué la mecánica estadística BG no puede dar cuenta de la invarianza de escala.

Cuando hablamos de varianza, la idea física que debemos tener es la desvia-

ción del estado de equilibrio (o lo que es lo mismo, de los valores medios) que presenta nuestro sistema. Es obvio que si el sistema nunca se alejase apreciablemente del valor medio de sus magnitudes no podría existir ninguna transición de fase en el sistema, ya que tendería a permanecer en equilibrio (supuesto que se trata de un equilibrio estable) para siempre. Las fluctuaciones son desviaciones respecto a la media que simbolizamos con la varianza y debido a su existencia puede llegar a darse el caso de que el sistema evolucione a otro equilibrio diferente al original. Es entonces cuando hablamos de transición de fase.

Para saber si nuestro sistema está próximo a esa transición de fase o no, debemos describirlo con una cantidad apropiada. Una que se usa asiduamente se trata de la función de correlación entre dos espines del modelo. Con la función de correlación lo que hacemos es parametrizar la influencia de un espín en los demás. En principio esta función debería decrecer con la distancia, de forma que un espín afecte muy ligeramente a espines lejanos. A partir de esa función se define una distancia de correlación, que se considera como la distancia máxima a la que llega la influencia del espín considerado. Sin embargo, a medida que la temperatura se acerca a la temperatura de Curie (y consecuentemente estamos más cerca de una transición de fase) esa función de correlación describe una mayor influencia de cada espín sobre todos los demás de la muestra, aumentando la distancia de correlación, hasta llegar a ser infinita en  $T_c$ , lo que da lugar a la universalidad y la invarianza de escala.

Cuando la distancia de correlación de los espines aumenta, podemos dividir nuestro sistema en “macrocelas” y crear un nuevo modelo de Ising con esas nuevas “macrocelas”, pero a medida que sigamos acercándonos a la temperatura de Curie deberíamos seguir encontrando la transición de fase. Esto nos da, en lo que se conoce como tratamiento de renormalización, un punto fijo. ¿Qué quiere decir esto? Cuando renormalizamos nuestro sistema mediante esas “macrocelas” y creamos un nuevo modelo de Ising con nuevo  $J'$ ,  $T'$  y  $s'_i$  también estamos modificando la solución para el punto de transición, que en dos dimensiones venía dada por

$$\sinh\left(\frac{2J'}{kT'}\right) = 0. \quad (8)$$

Como la temperatura de Curie tiene que ser idéntica, pues nos encontramos ante el mismo sistema independientemente de cómo lo describamos, en el tratamiento del grupo de renormalización tiene que existir un punto fijo no trivial (es decir, diferente de 0 o  $\infty$ ) que será el punto crítico del sistema [6]. A medida que nos acerquemos a este punto crítico las fluctuaciones irán aumentando debido a que las partes más distantes del sistema comienzan a estar correlacionadas y todas influirán en todas. Estas fluctuaciones tan grandes nos llevan a divergencias en las magnitudes termodinámicas observables (capacidad calorífica o susceptibilidad magnética, entre otras) que se describen mediante una ley polinómica, es decir

$$C_B \propto (T - T_c)^{-\alpha}, \quad (9)$$

$$\chi \propto (T - T_c)^{-\gamma} \quad (T < T_c), \quad (10)$$

donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son los denominados exponentes críticos y dan el comportamiento de las cantidades a estudiar [4, 5, 6].

Se puede ver que, según las ecuaciones anteriores, a medida que  $T \rightarrow T_c$  el valor para la capacidad calorífica (o para la susceptibilidad magnética) tiende a



infinito, en contraposición a lo que ocurre con un modelo basado en distribuciones gaussianas, donde se alcanzaría un valor finito. Además, el comportamiento de la distribución a medida que nos acercamos a la temperatura de Curie es claramente distinto en ambas distribuciones, siendo la pendiente de las distribuciones potenciales (la variación de la distribución con la temperatura) cada vez mayor, mientras que en el caso de las distribuciones gaussianas esta variación se va anulando a medida que nos acercamos a  $T_c$ . Es esta aparición de distribuciones potenciales (y por lo tanto no gaussianas) el que nos lleva al abandono de la mecánica estadística BG.

Por tanto, se ve que los conceptos de varianza del sistema, distancia entre la temperatura y la temperatura de Curie y distancia de correlación están ligados entre sí, son diferentes formas de explicar el mismo comportamiento del sistema. El estudio de una u otra opción se escogería según conveniencia y nos describiría, sin ambigüedad, el modelo de Ising. Gran parte de los esfuerzos han sido empleados en intentar determinar el valor de los exponentes críticos: se han empleado aproximaciones de campo medio (que toman la influencia de todo el sistema sobre un espín individual, dejando de lado las fluctuaciones) [6], propiedades de fractalidad y *scaling* [7], el uso generalizado del grupo de renormalización o, como se verá más adelante, el paso al continuo [5, 8].

Recientemente ha surgido otra forma distinta para tratar este caso (y, en general, cualquier caso de un sistema complejo que presente una transición de fase. Nos centramos en el modelo de Ising simplemente por su claridad y ser de fácil visualización física). Este nuevo método consiste en la generalización de la mecánica estadística mediante una nueva definición para la entropía. Esta generalización conduce, de forma natural, a distribuciones que cumplen un teorema del límite central con varianza aleatoria (puede llegar a ser infinita), lo cual parece óptimo para describir la fenomenología observada. Para ello presentaremos estas distribuciones, en lo que se llama la estadística de Lévy, pero antes explicaremos el paso al continuo y la analogía existente entre las teorías cuánticas y estadísticas de campos, dado que nuestro interés en este trabajo se centra en estos formalismos.

## Teoría estadística de campos

El físico ruso Lev Landau creó una generalización al continuo del modelo de Ising perteneciente a la misma clase de universalidad. Su idea consistía [5] en escribir un funcional para la energía libre de Gibbs en función de la magnetización y el campo externo  $L(M, B)$  usando tres argumentos: por razones de simetría se debía tener  $L(M, B) = L(-M, -B)$ , como la magnetización es pequeña en el punto crítico se podría expandir  $L(M, B)$  en potencias de  $M$  (Landau se quedó con los términos  $M^2$  y  $M^4$  y, dado que estamos interesados en distancias de correlación largas,  $M(x)$  variará lentamente y uno puede considerar que en el funcional sólo aparece el término  $[\nabla M(x)]^2$ . Con todo esto se puede escribir

$$L(M, B) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} [\nabla M(x)]^2 + \frac{\mu}{2} M^2(x) + \frac{\lambda}{4!} M^4(x) - M(x)B(x) \right], \quad (11)$$

donde  $\mu$  se anula en la temperatura de Curie y  $\lambda$  es analítica en un intervalo cercano al punto crítico. La magnetización se obtiene entonces minimizando el

funcional

$$\frac{\delta L(M, B)}{\delta M} = 0, \quad (12)$$

y así obtuvo unas ecuaciones análogas totalmente al tratamiento de campo medio. El problema con esta teoría del funcional es que en realidad las funciones  $\mu$  y  $\lambda$  no tienen por qué ser funciones analíticas de la temperatura y, de hecho, no lo son en general.

El formalismo introduce una variable que toma valores en el eje real  $-\infty < \phi < \infty$  que será un campo representando la magnetización del sistema, de forma que  $\langle \phi \rangle = M$ . La teoría consiste en escribir un hamiltoniano que, bajo ciertas asunciones (aproximación de Landau), se reduzca a la aproximación de campo medio para el modelo de Ising (que, como ya dijimos, desprecia las fluctuaciones en torno a la media) que se mejorará posteriormente mediante correcciones propuestas por Ginzburg. Daremos aquí una aproximación heurística a esta teoría siguiendo los pasos dados en [5].

En el modelo de Ising existía una simetría  $s_i \rightarrow -s_i$  en ausencia de campo externo, esto nos hace sospechar que el hamiltoniano de interacción del sistema sólo puede tener potencias pares de nuestro campo. Utilizando la propiedad de arbitrariedad del origen de energías (que será importante a la hora de generalizar el colectivo canónico con la entropía propuesta por Tsallis) vemos que el hamiltoniano, si la interacción es no muy fuerte, se puede escribir para una celda como [5]

$$H(\phi) = \frac{1}{2!}\mu\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4, \quad (13)$$

donde  $\lambda > 0$  por cuestiones de convergencia y los factores numéricos son convencionales. Este hamiltoniano presenta un mínimo o dos dependiendo del signo de  $\mu$  (si  $\mu > 0$  sólo tiene un mínimo en  $\phi = 0$  y si  $\mu < 0$  presenta dos mínimos idénticos en  $\phi = \pm\sqrt{\frac{-6\mu}{\lambda}}$ ). Al construir las teorías de campos es muy importante saber qué mínimo tenemos, pues a él se corresponderá el estado fundamental del sistema.

Cuando introducimos un campo magnético externo tenemos un hamiltoniano  $H'(\phi) = H(\phi) - B\phi$ , de modo que los mínimos se ven desplazados (ahora tenemos un mínimo local en  $\phi'_0$  y uno total en  $\phi_0$ ). La aproximación de Landau consiste en suponer que la función de partición del sistema es la exponencial del hamiltoniano cambiado de signo justo en ese mínimo, es decir,  $Z \approx \exp[-H_1(\phi_0)]$  [5]. Esta es la aproximación de campo medio, consistente en despreciar las fluctuaciones.

Con esto así se encuentra que  $\mu$  cambiará de signo al llegar a una temperatura crítica, pasando de un equilibrio estable cuando  $\phi = 0$  (magnetización nula) a un equilibrio espontáneo para cierto valor de  $\phi$ .

La generalización a varias celdas es casi inmediata y lleva a un hamiltoniano

$$H_{GL}[\phi_i] \propto a^D \sum_{i=1}^W \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} (\phi(x_i + a) - \phi(x_i))^2 + \frac{1}{2}\mu(T)\phi_i^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi_i^4 \right], \quad (14)$$

donde el primer sumando de este hamiltoniano es el factor que nos explica cómo evoluciona por si solo el sistema, interaccionando sólo entre vecinos más próximos (celdas separadas una distancia  $a$ ) de la forma indicada. Los otros dos factores son los expuestos para el caso de una única celda.  $D$  da cuenta de la dimensionalidad en la que estamos.

El paso al continuo se realiza de forma casi trivial, pasando de una suma a una integral (gracias al factor  $a^D$  presente) y promocionando el factor de evolución del sistema a un gradiente. Este paso lo podemos hacer ya que suponemos que al ser la correlación alta cerca del punto crítico, donde esta aproximación tiene sentido, la variación entre una celda y otra no será muy grande. Finalmente el hamiltoniano de Ginzburg y Landau es

$$H_{GL} = \int d^D \phi \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\mu(T)}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]. \quad (15)$$

Una forma elegante de tratar con un hamiltoniano de este tipo se puede seguir en [8].

Por supuesto, esta teoría sigue con el problema de que no es válida en absoluto en los casos en los que las fluctuaciones del campo  $\phi$  son grandes en comparación con  $\langle \phi \rangle$ . Por ello existen correcciones a la teoría. Estas mejoras son introducidas en la aproximación de Landau considerando una función de partición, no ya constante e igual a  $\exp[H_1(\phi_0)]$ , sino introduciendo cada vez más factores que vayan acomodando la función de partición a  $\exp[H_1(\phi)]$  en una serie de potencias. A su vez se expande el campo en la vecindad de  $\phi_0$  y se toma el primer orden del desarrollo (u órdenes mayores si es preciso).

Para resumir, el paso al continuo se corresponde con una función de partición (la herramienta básica de la mecánica estadística, dependiente de las probabilidades de los microestados del sistema y que codifica todas las propiedades del sistema) básicamente exponencial con el modelo de Ginzburg y Landau. Existe una aproximación consistente en hacer  $\lambda = 0$  que da un hamiltoniano gaussiano y la generalización en serie de potencias resulta ser exacta. Este es el llamado caso gaussiano y sólo es válido cuando  $\mu(T) > 0$ , es decir, cuando estamos por encima de la temperatura crítica [5].

¿Qué pasa cuando la temperatura es similar a la de Curie? En este caso tenemos correlaciones de alto orden en nuestro sistema, junto con observables físicos que divergen potencialmente. De nuevo nos encontramos con que la estadística gaussiana no es suficiente para describir nuestro sistema (sólo lo hace cuando las correlaciones son de corta distancia). Por ello se presenta en la siguiente sección la estadística de Lévy, gobernada por un teorema del límite central que no conduce necesariamente a una distribución gaussiana. Veremos que precisamente esta característica es uno de sus puntos más interesantes.

Esto puede estar relacionado con la corrección de Ginzburg al modelo dado originalmente por Landau. En éste teníamos en cuenta el valor medio del campo  $\langle \phi \rangle$ , despreciando totalmente las fluctuaciones del sistema (es decir, la varianza de la muestra estadística, al igual que se hace con los estudios de campo medio. Con el criterio dado por Ginzburg se consideran fluctuaciones del sistema y esto puede estar relacionado mediante las distribuciones de Levy. Al igual que con el modelo de Landau (con varianza cero) se obtiene una estadística gaussiana (que descansa en la finitud de la varianza de la muestra estadística), el criterio dado por Ginzburg tendría en cuenta fluctuaciones del sistema, empleando distribuciones estables de Levy.

Hemos, por tanto, partido de un modelo discreto canónico para el ferromagnetismo para llegar a las teorías estadísticas de campos haciendo una generalización al continuo. Cuando uno estudia las teorías cuánticas de campos se puede ver que los formalismos estadístico y de la teoría de campos son totalmente

equivalente sin más que extender matemáticamente el tiempo (o la temperatura) al rango complejo (ver [5]). Es decir, en ambos casos tendremos expresiones equivalentes siempre y cuando hagamos el cambio  $t \rightarrow i\beta\hbar$  entre el tiempo (en las teorías cuánticas de campos) y la temperatura (en las teorías estadísticas).

De este modo, las características de un sistema estadístico tratado con la teoría continua tienen un análogo en las características de un sistema cuántico. En [5] se muestra cómo la densidad de energía libre se corresponde con la densidad de energía en el estado fundamental de un sistema cuántico, o cómo la función de correlación es equivalente al producto ordenado temporal, de importancia vital para el cálculo de perturbaciones en teorías como la electrodinámica cuántica. Con esta introducción de la teoría cuántica de campos a partir de los fenómenos críticos se justifica el haber comenzado el presente trabajo con el estudio de las transiciones de fase en el modelo de Ising.

Pero esto es así en las teorías de campos convencionales, basados en la estadística gaussiana; ya veremos más adelante qué ocurre con estas teorías cuando aplicamos la estadística de Lévy y trabajamos con leyes estadísticas potenciales.

## Estadística de Lévy

Vamos a definir y hallar de forma rigurosa las distribuciones de los procesos aleatorios estables. En general, cuando se añaden variables aleatorias diferentes (aunque todas con la misma distribución de probabilidad) se obtiene una distribución distinta a las iniciales. Sin embargo, existe un conjunto especial de distribuciones (las distribuciones tipo Lévy definidas anteriormente) que resultan estables al hacer la suma de variables aleatoria; el resultado es una distribución de forma idéntica a la distribución que gobierna individualmente cada una de las variables aleatorias.

El comportamiento de una variable aleatoria ( $x$ ), viene descrito por una densidad de probabilidad ( $f(x)$ ), definida positiva y normalizada. Llamamos función característica de la distribución ( $\Phi(k) = \langle e^{ikx} \rangle$ ) a la transformada de fourier de la densidad de probabilidad. A partir de la función característica se pueden encontrar los diferentes momentos de la distribución de manera sencilla mediante

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n \Phi(k)}{dk^n} \right|_{k=0}. \quad (16)$$

También podríamos trabajar con los cumulantes ( $c_n(x)$ ) definidos por

$$\Phi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!} = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n c_n(x)}{n!} \right], \quad (17)$$

de donde se ve que  $c_1(x) = \langle x \rangle$  y  $c_2(x) = \sigma_x^2$ . Éstos se obtienen mediante

$$c_n(x) = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n \ln \Phi(k)}{dk^n} \right|_{k=0}. \quad (18)$$

Es usual encontrar en física distribuciones gaussianas en la mayoría de los campos de estudio. La razón de esta ubicuidad de la distribución normal reside en el teorema del límite central, que nos dice que una suma de  $n$  variables aleatorias con la misma media y varianza finitas tiene asociada una función de

distribución cumulante que, a medida que el número de variables crece, tiende a la distribución normal. La razón de este teorema reside, de forma fundamental, en la existencia de una varianza finita para la distribución de las variables originales.

La estadística de Lévy surge al relajar la condición de la finitud de la varianza de las variables aleatorias. Lévy y Khintchine encontraron que la forma más general de la función generatriz de los cumulantes ( $\ln \Phi(k)$ ) para un proceso estable (aquél que al hacer la convolución de varias variables sigue teniendo la misma densidad de probabilidad que las densidades originales) es [9]

$$\ln \Phi(k) = \begin{cases} i\mu k - \gamma |k|^\alpha \left[ 1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] & \alpha \neq 1 \\ i\mu k - \gamma |k| \left[ 1 + i\beta \frac{k}{|k|} \frac{2}{\pi} \ln |k| \right] & \alpha = 1 \end{cases} \quad (19)$$

donde  $\mu$  es directamente proporcional a la media,  $\beta \in [-1, 1]$  es un factor de asimetría,  $\gamma > 0$  es un factor de escala y  $0 < \alpha \leq 2$ . Se conocen formas analíticas para estas distribuciones sólo para los casos  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$  (Lévy-Smirnov),  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  (lorentziana) y  $\alpha = 2$  (gaussiana).

Sin embargo no se conocen expresiones analíticas para las distribuciones estables de probabilidad salvo en el caso asintótico  $|x| \rightarrow \infty$ , en cuyo caso recuperamos colas potenciales, como se ve en [9].

Vemos pues que la distribución gaussiana es sólo un caso particular ( $\alpha = 2$ ) de la solución más general para el teorema del límite central; en concreto la única distribución estable con varianza finita (siendo simétrica) y por eso es tan fundamental en física. La razón de esto es que al hacer una aproximación asintótica para un proceso estable con densidad de probabilidad simétrica, encontramos que diverge para altos valores de  $|x|$  como  $|x|^{-(1+\alpha)}$ , por lo que sólo para el caso  $\alpha = 2$  encontramos que el segundo momento de la distribución es finito, siendo infinito para todo momento de orden  $n \geq \alpha$  si  $\alpha < 2$ .

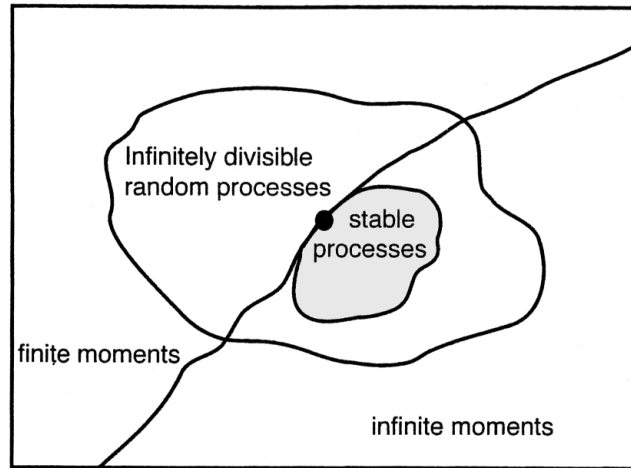


Figura 1: Esquema representativo de las clases de procesos aleatorios discutidos aquí. El punto señala el proceso estable de tipo gaussiano. *Figura 4.3 de [9]*

Por lo tanto los procesos de Lévy, al no tener varianza definida, no presentan

una escala característica. Ahí reside, precisamente, el interés de estos procesos, ya que parece la distribución idónea a la hora de tratar los problemas de sistemas complejos: sin escala definida pero, a la vez, con un teorema del límite central asociado.

Este grupo de distribuciones estables presenta, además, una característica que las hace idóneas para tratar el modelo de Ising a la luz de lo expuesto en secciones anteriores, tienen la característica de presentar invarianza de escala en el mismo sentido que la presentaban los observables físicos en la proximidad de la transición de fase. Siendo esto así, se justifica plenamente la adición de una explicación de este tipo de distribuciones en el presente trabajo.

Una vez que conocemos la generalización del teorema del límite central surge la siguiente pregunta, ¿qué mecánica estadística emerge de estas distribuciones de probabilidad? La respuesta hemos de buscarla en la aplicación del principio de entropía máxima de Jaynes a una nueva funcional entropía, la entropía de Tsallis. La relación entre este tipo de estadística y la mecánica estadística propuesta por Tsallis se hace patente al trabajar con esta última, ya que al tratar los problemas con la entropía generalizada surgen, de modo natural, las distribuciones estables de Lévy.

## Generalización de la mecánica estadística extensiva de Tsallis

En 1988, Constantino Tsallis propuso una generalización de la definición de entropía para dar cuenta de las propiedades multifractales encontradas en las investigaciones en ciertos temas, como sistemas dinámicos no lineales o transiciones de fase. La fórmula propuesta para la entropía es [10]

$$S_q = \frac{k}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^W p_i^q \right), \quad (20)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $q$  es un índice que puede variar según el caso y que permite recobrar la entropía usual  $S = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$  en el límite  $q \rightarrow 1$ . Los diferentes  $\{p_i\}$  corresponden a las probabilidades asociadas a cada una de las  $W$  posibilidades para las configuraciones microscópicas del sistema.

Con esa definición y la condición de normalización  $\sum p_i = 1$  se puede ver que esta fórmula define una entropía estrictamente no negativa, siendo nula en el caso habitual  $W = 1$  (siempre que  $q$  sea positivo).

Esta podría parecer una de tantas posibles fórmulas que recobrasen la entropía de Boltzmann en cierto límite hábilmente escogido, pero posee ciertas propiedades que la hacen una candidata mucho más seria que eso. Cuando tenemos dos sistemas independientes  $A$  y  $B$  y los unimos, esta generalización posee un cierto grado de no extensividad dependiendo del valor de  $q$  (que controla, por tanto, la extensividad del sistema) en la forma

$$\frac{S_q(A \cup B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}, \quad (21)$$

que es la llamada *regla de pseudo-aditividad*. Se puede apreciar que en el caso  $q \rightarrow 1$  recuperamos la aditividad correspondiente a la entropía de Boltzmann,

mientras que cuando  $q < (>)1$  tenemos un sistema superextensivo (subextensivo). Es previsible que esto nos permita entender la no extensividad característica de los sistemas complejos que la mecánica estadística convencional no es capaz de solucionar.

Otra propiedad de esta entropía tiene un significado algo más complicado de entender, pero es de suma importancia pues implica la no extensividad de las teorías desarrolladas a partir de la expresión para la entropía propuesta por Tsallis. Si tenemos un conjunto de  $W$  configuraciones y lo dividimos en dos subconjuntos  $W_a$  y  $W_b$  y definimos  $p_a = \sum_{i=1}^{W_a} p_i$  y  $p_b = \sum_{i=W_a+1}^W p_i$  entonces

$$S_q(\{p_i\}) = S_q(p_a, p_b) + p_a^q S_q(\{p_i/p_a\}) + p_b^q S_q(\{p_i/p_b\}), \quad (22)$$

donde  $\{p_i/p_{a(b)}\}$  son las probabilidades condicionadas de los microestados; esta no es más que la probabilidad de aditividad de la entropía de Shannon, pero con un exponente  $q$  en las probabilidades que multiplican a las entropías, mientras que en el caso de Shannon ese exponente vale 1 (no podía ser de otro modo, el caso  $q \rightarrow 1$  recupera la entropía de Shannon).

Esta última propiedad es importante ya que, cuando  $q < (>)1$  tenemos que  $p_i^q > (<)p_i$  y por lo tanto, dependiendo del valor del índice de no extensividad, se verán beneficiados los eventos frecuentes ( $q > 1$ ) o los de probabilidad más baja ( $q < 1$ ).

Se ha demostrado [11] que con estas dos propiedades de no extensividad en general y aditividad generalizada de Shannon, junto con las más usuales de continuidad de la función entropía y que sea función creciente con  $W$ , la única entropía que es posible definir es la que Tsallis propuso.

Una vez que tenemos una definición de entropía que sea una candidata firme a generalizar la propuesta por Boltzmann (y ésta lo es por recuperar el caso convencional, dar no extensividad en general y un criterio de unicidad junto con la regla de aditividad generalizada de Shannon) lo que nos urge es encontrar las distribuciones de probabilidad características de las diferentes situaciones del sistema, aplicando para ello el principio de entropía máxima propuesto por Jaymes. Para el colectivo canónico (en el que se conoce el valor medio de la energía del sistema  $\langle U \rangle$ ) nuestra estrategia en la mecánica estadística de BG consistía en maximizar la entropía sujeta a las condiciones  $\sum p_i = 1$  y  $\sum p_i \varepsilon_i = \langle U \rangle$ , con  $\varepsilon_i$  la energía del microestado  $i$ -ésimo. Cabe pensar que podremos hacer lo mismo con la entropía generalizada, pero nos encontramos con ciertas dificultades. Al utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar la entropía de Tsallis sujeto a las condiciones de normalización y constancia del valor medio de la energía del sistema se encuentra una probabilidad para los microestados [10]

$$p_i = \frac{[1 - (q-1)\beta\varepsilon_i]^{1/(q-1)}}{Z_q(\beta)}, \quad (23)$$

con  $Z_q(\beta) = \sum [1 - (q-1)\beta\varepsilon_i]^{1/(q-1)}$ . Esta distribución de probabilidades depende de la energía de los microestados de forma polinomial (excepto en el caso  $q \rightarrow 1$ , donde recuperamos la colectividad canónica usual, con una ley exponencial), pero presenta dificultades para trabajar con ella. En concreto presenta divergencias indeseadas cuando tratamos con sistemas complejos, ligados a la infinitud del momento de segundo orden en las distribuciones de Lévy.

Como lo que intentábamos era, precisamente, tratar los sistemas que se rigen mediante distribuciones de Lévy, se hace evidente que, o bien abandonamos la generalización de la entropía de Tsallis, o bien modificamos algo. No se tardó mucho en probar con otra ligadura para la maximización de la entropía:  $\sum p_i^q \varepsilon_i = U'_q$ . Esta condición ya no conducía a una distribución con las divergencias tan molestas que presentaba la anterior y además presentaba una serie de características interesantes, como la estructura termodinámica de las transformadas de Legendre entre cantidades intensivas y extensiva para todo valor de  $q$ , pero no estaba claro el significado de la condición empleada.

Esa ligadura ya no es un valor medio, de hecho, ya que exigimos como condición que la energía vaya con algo de la forma  $\sum p_i^q \omega_i = \Omega'_q$  se podría esperar que esto fuese así para todos los observables (¿por qué hacer distinciones entre unos y otros?); en concreto, si hacemos  $\omega_i = 1$  tenemos que  $\sum p_i^q = \langle 1 \rangle_q \neq 1$  y por lo tanto no estamos imponiendo la energía media del sistema, eso no es una distribución de probabilidades. Tampoco encontramos que la distribución sea invariante ante una traslación del espectro de energías  $\{\varepsilon_i\} \rightarrow \{\varepsilon_i + \varepsilon_0\}$ , hecho que choca con la libertad de escoger el origen de energías, que es una simetría fundamental de la física.

Por esas razones se dio un paso más, convirtiendo la condición de nuevo en el valor medio de una distribución de probabilidades, pero esta vez generalizada según el índice  $q$ . La nueva ligadura es ahora  $\sum r_i(q) \varepsilon_i = \langle U \rangle_q$ , siendo la distribución  $\{r_i(q)\} = \{p_i^q / \sum p_i^q\}$ . Con esta condición y la condición de normalización  $\sum r_i(q) = 1$  (equivalente a  $\sum p_i = 1$ ) se llega, finalmente, al colectivo canónico generalizado [2]:

$$p_i = \frac{\left[1 - (1 - q)\beta(\varepsilon_i - \langle u \rangle_q) / \sum_{j=1}^W p_j^q\right]^{1/(1-q)}}{\bar{Z}_q}, \quad (24)$$

donde

$$\bar{Z}_q = \sum_{i=1}^W \left[1 - (1 - q)\beta(\varepsilon_i - \langle u \rangle_q) / \sum_{j=1}^W p_j^q\right]^{1/(1-q)}. \quad (25)$$

Esta tercera (y última) opción para las ligaduras que acompañan a la maximización de la entropía satisfacen, al igual que el caso intermedio, la estructura de transformadas de Legendre de tanta importancia para los potenciales termodinámicos y un corte muy útil cuando  $q < 1$  (probabilidades que se van a cero en los niveles de energía suficientemente altos para producir un valor negativo para el argumento de  $\varepsilon_i$ ).

Además es invariante bajo traslaciones del origen de energías ( $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i + \varepsilon_0$ ) que conducen a  $\langle U \rangle_q \rightarrow \langle U \rangle_q + \varepsilon_0$ , dejando invariante las diferencias energéticas presentes en la fórmula de la distribución y, por tanto, las probabilidades.

Por último cabe destacar que, si tenemos dos sistemas  $A$  y  $B$  se cumple

$$\langle U(A \cup B) \rangle_q = \langle U(A) \rangle_q + \langle U(B) \rangle_q, \quad (26)$$

dando lugar a la aditividad del valor medio generalizado de la energía (que, cómo no, en el caso  $q \rightarrow 1$  da lugar a la recientemente introducida extensividad de la energía del sistema).

Una breve reseña de sistemas a los que se ha aplicado la mecánica estadística no extensiva se da a continuación, pero sin profundizar en los cálculos de la



misma. Esta lista podría ser mucho más larga y dentro de la mayoría de las referencias que se proporcionan se pueden encontrar más ejemplos de aplicaciones de la entropía de Tsallis.

Uno de los ejemplos que involucran a interacciones de largo alcance es autogravitación de sistemas astrofísicos [12], turbulencias en líquidos [13, 14], difusión anómala de Lévy [15, 16, 17], sistemas disipativos no lineales [18] y, por supuesto, el ferromagneto de Ising [19, 20]. Para una bibliografía actualizada del tema siempre se puede consultar [21]. Se presentan a continuación algunos resultados obtenidos con la mecánica estadística no extensiva.

### Calor específico de un oscilador armónico clásico

Según se ve en [2], para un oscilador caracterizado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (27)$$

asociado a un espectro continuo  $\varepsilon(x) = \varepsilon n$  con  $n$  un número natural se tiene

$$U_q = \varepsilon(2 - q)^{1/q} \left( \frac{kT}{\varepsilon} \right)^{1/q}, \quad (28)$$

siempre que  $q < 2$ , de donde se obtiene

$$C_q = \frac{dU}{dT} = \frac{k}{q} (2 - q)^{1/q} \left( \frac{kT}{\varepsilon} \right)^{(1-q)/q}, \quad (29)$$

que recupera el conocido valor  $C = k$  cuando  $q \rightarrow 1$ .

Se pueden encontrar cálculos numéricos también en [2] para el cálculo del oscilador armónico cuántico.

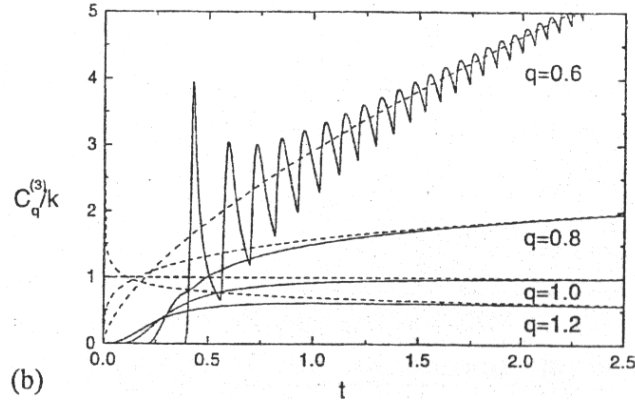


Figura 2: Comportamiento para diversos valores de  $q$  del calor específico del oscilador armónico cuántico (línea sólida) y del oscilador armónico clásico (línea punteada). La abscisa es  $t = kT/\varepsilon$ . *Figura 1(b) de [2]*

### Coefficiente de difusión en el movimiento browniano

El caso del coeficiente de difusión en el movimiento browniano se revisa en [17] usando la condición para minimizar la entropía

$$\langle x^2 \rangle_q = \int d(x/\sigma) x^2 [\sigma p(x)]^q = \sigma^2, \quad (30)$$

que da cuenta del tamaño del paso del desplazamiento estocástico que caracteriza al movimiento browniano, pero de una forma acorde con la generalización de Tsallis y preservando la estructura de Legendre que se encuentra en la termodinámica.

Con esa condición se obtiene

$$\langle x^2 \rangle_q (N) = D_q k T N^{q-1}, \quad (31)$$

donde  $D_1 = 1/2$ , por lo que se recupera el resultado obtenido en el artículo original de Einstein en el límite  $q \rightarrow 1$ .

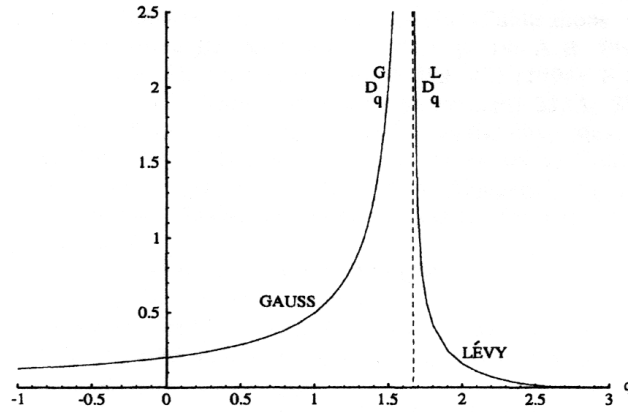


Figura 3: Valor de  $D_q$  en función de  $q$ , nótese el comportamiento singular en  $q \rightarrow \frac{5}{3}$ . *Figura 3 de [17]*

### Gas ideal

Tomando el formalismo explicado anteriormente se resuelve en [1] de forma analítica el modelo de gas ideal. El resultado obtenido es importante porque muestra la posibilidad de obtener calores específicos negativos (al igual que los que se obtienen en algunos problemas de astrofísica).

En este artículo se parte de la expresión para la energía libre generalizada

$$F_q = U_q - TS_q = U_q - \frac{1}{\beta} \frac{[Z_q \beta]^{1-q} - 1}{1-q}, \quad (32)$$

para encontrar las expresiones para el calor específico  $C_q = -T \left( \frac{\partial^2 F_q}{\partial T^2} \right)_V$  y la presión  $P_q = - \left( \frac{\partial F_q}{\partial V} \right)_T$ .

Una vez hechos los cálculos para un gas ideal compuesto por  $N$  partículas de masa  $m$  en un volumen  $V$  y manteniéndonos en el régimen  $0 < q < 1$  los resultados obtenidos son

$$C_q = \frac{\frac{3}{2}kN}{1 - (1-q)^{\frac{3N}{2}}} A_q(T), \quad (33)$$

para el calor específico en un espacio tridimensional y

$$p_q = \frac{NkT}{V} A_q(T), \quad (34)$$

para la presión, donde se ha definido

$$A_q(T) = \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + \frac{3N}{2}\right)} \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left(\frac{2\pi mkT}{1-q}\right)^{\frac{3N}{2}} \right]^{\frac{2(1-q)}{(1-q)^{3N}-2}} \left[ 1 + (1-q)\frac{3N}{2} \right]^{\frac{(1-q)3N+2q}{(1-q)^{3N}-2}}. \quad (35)$$

Se puede ver cómo el calor específico es negativo cuando  $(1-q)3N/2 > 1$  (y que la presión es siempre definida positiva). Además, como no podía ser de otra forma, el calor específico y la presión adquieren la forma obtenida mediante la teoría BG en el límite  $q \rightarrow 1^-$  (en el cual  $A_1(T) = 1$ ):

$$C_1 = \frac{3kN}{2}, \quad (36)$$

$$p_1 = \frac{NkT}{V}. \quad (37)$$

### Sistemas hadrónicos

En [3] se da un resumen de las aplicaciones que ha tenido este formalismo en la explicación del comportamiento observado en materia hadrónica, basándose en la analogía entre una transición de fase y el paso de quarks confinados a quarks “libres”.

Se ha comprobado que el espectro de hadrones observado se ajusta en algunas regiones a una ley de potencias para colisiones protón-protón, lo cual puede ser entendido en el marco del formalismo explicado recientemente, aplicando a los partones (los diferentes constituyentes que interactúan casi libremente entre sí dentro de los hadrones) distribuciones deducidas a partir de la entropía de Tsallis.

Otra de las pruebas que se dan es la explicación de una temperatura límite para las resonancias de hadrones pesados debido a un crecimiento exponencial del espectro de masas. En general, con la estadística de Tsallis, para la convolución de  $N$  partones sin masa con un momento  $d$ -dimensional se encuentra que la energía media satisface

$$\langle E \rangle = N \sum_{j=1}^d \frac{T_q E_c}{E_c - j T_q}, \quad (38)$$

expresión que diverge cuando  $T \rightarrow E_c/d$ , mostrando así una temperatura límite observada experimentalmente (ver artículo para más referencias) y en donde la expresión para la temperatura se derivaría mediante la entropía de Tsallis.

Se ha de notar, también, cómo comienzan a aparecer artículos aplicando todas estas ideas a la teoría cuántica de campos, comenzando por el momento con la distribución partónica de los hadrones para explicar las colas potenciales presente en los espectros de la materia hadrónica, así como la existencia de temperatura límite en el espectro de resonancias (llamado espectro de Hagedorn) de hadrones pesados, resumido en [3] y que da apoyo a la presencia de distribuciones de equilibrio no exponenciales en materia con quarks calientes (a alta energía).

Más recientemente ha aparecido un artículo (ver referencia [22]) que estudia la teoría cuántica de campos en el marco de la estadística no extensiva de Tsallis, haciendo un estudio mediante perturbaciones en torno a  $q \approx 1$ . Allí se da el cálculo de propagadores en teoría cuántica de campos para valores de  $q$  próximos a la unidad, lo cual sería un primer paso para hacerlo para  $q$  arbitrario y se encuentra que las llamadas masas térmicas para quarks y gluones resultan ser inferiores a las calculadas en el marco de la estadística de Gibbs.

## Conclusiones

En el trabajo se comenzó estudiando el modelo de Ising como herramienta para introducir ciertas propiedades de los sistemas complejos, a saber, la invarianza de escala, el fenómeno de scaling, el tratamiento con el grupo de renormalización (que desprecia las fluctuaciones del sistema) y las leyes potenciales. Después se siguió con la propuesta de Landau para pasar al continuo el modelo de Ising, generalizándolo finalmente a teorías estadísticas de campos, conectadas de forma fundamental con las teorías cuánticas de campos. Se vio como las fluctuaciones del sistema eran de suma importancia para la obtención de las leyes polinómicas y el comportamiento del sistema en las inmediaciones del punto crítico  $T_c$  y cómo mediante el criterio de Ginzburg se tenían en cuenta en el modelo de Landau. Posteriormente se estudió la generalización de la mecánica estadística a una teoría no extensiva, para lo cual se tuvo que introducir antes las distribuciones estadísticas de Levy. Esta nueva mecánica estadística, que está aún comenzando a surgir y necesita ser desarrollada más en profundidad, se aplicó a una cantidad considerable de sistemas físicos y algunos de ellos se resumieron en la sección anterior. Sin embargo, revisando la referencia [21], salta a la vista que la reformulación de las teorías estadísticas y cuánticas de campos aún no ha sido realizada bajo la hipótesis de entropía de Tsallis. Por el momento los esfuerzos de la gente se han centrado en estudios de sistemas discretos, dejando de lado la tarea de deducir una teoría estadística de campos generalizada.

Este nuevo planteamiento de la mecánica estadística daría cuenta de sistemas complejos (de interacción de larga distancia, con transiciones de fase...) definidos mediante campos, no mediante variables, de forma tan satisfactoria como las referencias mencionadas anteriormente. Además sería una teoría generalizable a la teoría cuántica de campos donde, a pesar de haber encontrado resultados muy precisos, sigue habiendo dificultades con algunos sistemas. Esto es debido a que, como hemos dicho anteriormente, ambos formalismos de campos son totalmente equivalentes.

Esto pasaría por utilizar una función de partición acorde con una teoría continua. Si con la mecánica estadística BG teníamos una entropía  $S_{BG}[p] =$

$-k \int p(x) \ln p(x) dx$ , que nos llevaba a una función de partición en el colectivo canónico

$$Z_{BG} = \int e^{-\beta H(x)} dx, \quad (39)$$

en la generalización de Tsallis tendremos la entropía  $S_q[p] = k \frac{1 - \int [p(x)]^q dx}{q-1}$  (de donde se ve que  $S_1[p] = S_{BG}[p]$ ) que nos lleva a la función de partición

$$Z_q = \int \left( \frac{1 - \beta(1-q) \left( H(x) - \langle H \rangle_q \right)}{\int [p(y)]^q dy} \right)^{\frac{1}{1-q}} dx, \quad (40)$$

donde  $\langle H \rangle_q = \frac{\int [p(x)]^q H(x) dx}{\int [p(x)]^q dx}$  se puede absorber en nuestro hamiltoniano inicial (equivale a fijar nuestro estado fundamental a aquel que haga este promedio generalizado igual a cero) y el denominador que aparece en el integrando es igual a  $\langle 1 \rangle_q \neq 1$  para  $(q \neq 1)$ .

Este planteamiento nos daría la posibilidad de tratar con estadísticas no gaussianas y gaussianas a la vez, de forma que manejando el parámetro  $q$  se pudiese describir el sistema (obviamente,  $q = 1$  cuando las interacciones sean de corto alcance). Esto permite generalizar la teoría de Landau a temperaturas menores que (y cercanas a) la temperatura crítica, ya que si la temperatura es mayor la aproximación gaussiana explicada anteriormente resulta correcta.

Esta generalización daría paso al cálculo de los exponentes críticos en las transiciones de fase y, por tanto, la comprensión de los procesos que están ocurriendo en el sistema.

Yendo un paso más allá, esta generalización puede ayudar en otros campos de la física como la teoría cuántica de campos. La relación entre la teoría estadística de campos y la teoría cuántica de campos va más allá de la simple similitud en su formalismo (similitud evidente, por otra parte, ya que se obtienen expresiones equivalentes con el cambio  $t \rightarrow i\beta\hbar$ ). Ambas teorías describen un sistema que va de un estado a otro (o bien de un conjunto de estados a otro). Esta pequeña diferencia aparece marcada al tener en cuenta la variable temperatura, que nos da una distribución de probabilidades determinada. Otra diferencia surge del número de grados de libertad tratados: en la teoría estadística tenemos un número altísimo (generalmente del orden del número de Avogadro para nuestro sistema macroscópico) pero finito, mientras que en la teoría cuántica de campos los grados de libertad son directamente infinitos. Esta última característica marca una sutil diferencia, pero muy importante. De todos modos, siempre se puede pasar de un formalismo al otro sin más que realizar pequeños ajustes en nuestras ecuaciones para tener en cuenta estas características.

La utilización de modelos canónicos como resultó ser el modelo de Ising podría repercutir muy beneficiosamente a la hora de desarrollar esta generalización. La característica de dichos modelos de ser aplicables a gran número de problemas, junto con la generalidad del formalismo, llevaría a un desarrollo amplio e importante en las teorías de campos, tanto estadísticas como cuánticas. Con esto, si la generalización de Tsallis triunfase en la mecánica estadística de campos, habría que interpretarla inmediatamente en la teoría cuántica de campos por medio de estos modelos canónicos y aplicarla a los problemas que esta teoría tiene con las divergencias presentes en QCD e, incluso, en gravitación.

## Referencias

- [1] S. Abe, Phys. Lett. A 263, 424 (1999)
- [2] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino, Physica A 261, 534 (1998)
- [3] T.S. Biró, nucl-th/0507070 (2005)
- [4] K. Huang (2<sup>a</sup> edición, 1987) *Statistical Mechanics* John Wiley & Sons, cop.
- [5] M. le Bellac (1<sup>a</sup> edición, 1988) *Quantum and Statistical Field Theory* Oxford University Press
- [6] D. Chandler (1<sup>a</sup> edición, 1987) *Introduction to Modern Statistical Mechanics* Oxford University Press
- [7] L.E. Reichl (2<sup>a</sup> edición, 1998) *Modern Course in Statistical Physics* John Wiley & Sons, cop.
- [8] D.J. Amit (2<sup>a</sup> edición, 1989) *Field theory, the renormalization group and critical phenomena* World Scientific
- [9] R.N. Mantegna (1<sup>a</sup> edición, 2000) *An Introduction to Econophysics* Cambridge University Press
- [10] C. Tsallis, J. Stat. Phys. 52, 479 (1988)
- [11] R.J.V. Santos, J. Math. Phys. 38, 4104 (1997)
- [12] A.R. Plastino, A. Plastino, Phys. Lett. A 174, 384 (1993)
- [13] B.M. Boghosian, Phys. Rev. E 53, 4754 (1996)
- [14] C. Anteneodo, C. Tsallis, J. Mol. Liq. 71, 255 (1997)
- [15] D.H. Zanette, P.A. Alemany, Phys. Rev. Lett. 75, 366 (1995)
- [16] D.H. Zanette, P.A. Alemany, Phys. Rev. Lett. 77, 2590 (1996)
- [17] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza, R. Maynard, Phys. Rev. Lett. 77, 5422 (1996)
- [18] F.A. Tamarit, S.A. Cannas, C. Tsallis, Eur. Phys. J. B 1, 545 (1998)
- [19] F.D. Nobre, C. Tsallis, Physica A 213, 337 (1995)
- [20] L.R. da Silva, H.E. Stanley, Physica A 234, 497 (1996)
- [21] <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>
- [22] H. Kohyama, A. Niégawa, Prog. of Theor. Phys. 115, 73 (2006)